

Polinoame

Un **polinom de gradul** n in nedeterminata X se scrie in forma canonica astfel:

$$P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n, \quad \text{unde } a_0 \neq 0. \quad (1)$$

Numerele a_0, a_1, \dots, a_n sunt **coeficientii polinomului**.

Daca nu se precizeaza se considera ca coeficientii polinomului sunt numere complexe.

Polinoamele $P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n$, $a_0 \neq 0$ si $Q(X) = b_0X^n + b_1X^{n-1} + \dots + b_{n-1}X + b_n$, $b_0 \neq 0$ sunt egale, daca si numai daca $a_i = b_i$ pentru $\forall i = \overline{0, n}$.

Fie polinomul (1) si $\alpha \in \mathbb{C}$. Numarul $P(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1}\alpha + a_n$ se numeste **valoare a polinomului** $P(X)$ pentru $X = \alpha$.

Teorema lui Bezout. Restul impartirii polinomului $P(X)$ prin binomul $X - \alpha$ este egal cu $P(\alpha)$.

Numarul $\alpha \in \mathbb{C}$ se numeste **radacina a polinomului** $P(X)$, daca $P(\alpha) = 0$.

Prin urmare, conform teoremei lui Bezout, numarul $\alpha \in \mathbb{C}$ este radacina a polinomului $P(X)$, daca si numai daca $P(X)$ se divide prin $X - \alpha$.

Numarul $\alpha \in \mathbb{C}$ se numeste **radacina de multiplicitate** m a polinomului $P(X)$, daca $P(X)$ se divide prin $(X - \alpha)^m$ si nu se divide prin $(X - \alpha)^{m+1}$.

Daca $\alpha \in \mathbb{C}$ este radacina de multiplicitate m a polinomului $P(X)$, atunci α este radacina si a polinoamelor $P'(X), P''(X), \dots, P^{(m-1)}(X)$, si nu mai este radacina a polinomului $P^{(m)}(X)$:

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0, \quad P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Probleme rezolvate

1. Sa se calculeze $P(c)$, daca $P(X) = X^3 - 9X + 14$ si $c = \sqrt[3]{8 + \sqrt{37}} + \sqrt[3]{8 - \sqrt{37}}$.

Solutie

Aplicam formula $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ si obtinem:

$$P(c) = 8 + \sqrt{37} + 8 - \sqrt{37} + 3\sqrt[3]{(8 + \sqrt{37})(8 - \sqrt{37})} \cdot c - 9c + 14 = 16 + 3\sqrt[3]{27}c - 9c + 14 = 16 + 9c - 9c + 14 = 30.$$

Raspuns: $P(c) = 30$.

2. Sa se determine polinomul de gradul doi $P(X)$, daca $P(1) = 4$, $P(-1) = 7$, $P(3) = 24$.

Solutie

Fie $P(X) = aX^2 + bX + c$. Avem

$$P(1) = 4 \quad \Rightarrow \quad a + b + c = 4,$$

$$P(-1) = 7 \quad \Rightarrow \quad a - b + c = 7,$$

$$P(3) = 24 \quad \Rightarrow \quad 9a + 3b + c = 24.$$

$$\text{Rezolvam sistemul } \begin{cases} a + b + c = 4 \\ a - b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 24 \end{cases} \quad \text{si obtinem: } a = \frac{23}{8}, \quad b = -\frac{3}{2}, \quad c = \frac{21}{8}.$$

Raspuns: $P(X) = \frac{23}{8}X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{21}{8}$.

3. Sa se afle gradul polinomului $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ in functie de m , $m \in \mathbb{C}$, daca $P(X) = (m^2 + 2m - 3)X^4 + (m^3 - 1)X^3 + (m^2 - 1)X^2 + (2m - 3)X + 5 + m$.

Solutie

Daca $m^2 + 2m - 3 \neq 0$, atunci grad $P(X) = 4$. Dar $m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3, \\ m = 1. \end{cases}$ Asadar, daca $m \in \mathbb{C} \setminus \{-3, 1\}$, atunci grad $P(X) = 4$. Daca $m = -3$, atunci $m^3 - 1 = (-3)^3 - 1 \neq 0$. Rezulta ca in acest caz grad $P(X) = 3$.

Daca $m = 1$, atunci $m^3 - 1 = 0$, $m^2 - 1 = 0$, iar $2m - 3 \neq 0$. Deci, in acest caz grad $P(X) = 1$.

Raspuns: daca $m \in \mathbb{C} \setminus \{-3, 1\}$ grad $P(X) = 4$;
daca $m = -3$ grad $P(X) = 3$;
daca $m = 1$ grad $P(X) = 1$.

4. Sa se determine pentru ce valori ale parametrilor reali a, b, c, p, q, r sunt egale polinoamele $P(X) = 6X^5 + 7X^4 - 33X^2 - 29X - 42$ si $Q(X) = 3aX^5 + (-4a + 3b)X^4 + (a - 4b + 3c)X^3 + (-7a + b - 4c + p)X^2 + (-7b + c + q)X + (-7c + r)$.

Solutie

Egalam coeficientii termenilor de acelasi grad si obtinem sistemul:

$$\begin{cases} 3a & = 6 \\ -4a + 3b & = 7 \\ a - 4b + 3c & = 0 \\ -7a + b - 4c + p & = -33 \\ -7b + c + q & = -29 \\ -7c + r & = -42 \end{cases}$$

Rezolvand acest sistem, obtinem: $a = 2$, $b = 5$, $c = 6$, $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$.

5. Sa se determine catul si restul impartirii polinomului $P(X)$ la polinomul $Q(X)$, daca $P(X) = 15X^5 + 16X^4 + 13X^3 + 18X^2 + 4X + 5$, $Q(X) = 3X^3 + 2X^2 + 1$.

Solutie

Efectuam impartirea

$$\begin{array}{r|l} \underline{15X^5 + 16X^4 + 13X^3 + 18X^2 + 4X + 5} & \underline{3X^3 + 2X^2 + 1} \\ \underline{15X^5 + 10X^4} & \underline{5X^2 + 2X + 3} \\ \hline & \underline{6X^4 + 13X^3 + 13X^2 + 4X + 5} \\ & \underline{6X^4 + 4X^3} & \underline{+ 2X} \\ \hline & \underline{9X^3 + 13X^2 + 2X + 5} \\ & \underline{9X^3 + 6X^2} & \underline{+ 3} \\ \hline & & \underline{7X^2 + 2X + 2} \end{array}$$

De aici, catul $C(X) = 5X^2 + 2X + 3$ si restul $R(X) = 7X^2 + 2X + 2$.

Raspuns: $C(X) = 5X^2 + 2X + 3$, restul $R(X) = 7X^2 + 2X + 2$.

6. Sa se determine radacinile polinomului $P(X) = X^3 + 2aX^2 - 5X - a - 9$, $a \in \mathbb{R}$, daca se stie ca restul impartirii lui $P(X)$ la binomul $X - 2$ este egal cu restul impartirii lui $P(X)$ la binomul $X + 1$.

Solutie

Conform teoremei lui Bezout, din conditiile problemei, rezulta ca $P(2) = P(-1)$. Prin urmare, $8 + 8a - 10 - a - 9 = -1 + 2a + 5 - a - 9$. De aici $a = 1$.

Deci, polinomul $P(X)$ are forma

$$P(X) = X^3 + 2X^2 - 5X - 10.$$

Obtinem: $P(X) = X^2(X + 2) - 5(X + 2) = (X + 2)(X^2 - 5)$.

$$P(X) = 0 \Leftrightarrow (X + 2)(X - \sqrt{5})(X + \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = -2, \\ X = -\sqrt{5}, \\ X = \sqrt{5}. \end{cases}$$

Raspuns: $-2, -\sqrt{5}, \sqrt{5}$.

7. Pentru ce valori ale parametrilor reali m si n polinomul

$$P(X) = X^4 + (m - 3)X^3 + (2m + 3n)X^2 - nX + 3,$$

impartit la binomul $X - 1$ da rest 5 si impartit la binomul $X + 1$ da rest 3?

Solutie

Deoarece restul impartirii polinomului $P(X)$ la binomul $X - \alpha$ este egal cu $P(\alpha)$ (teorema lui Bezout), pentru aflarea parametrilor m si n rezolvam sistemul de ecuatii: $\begin{cases} P(1) = 5 \\ P(-1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m - 3 + 2m + 3n - n + 3 = 5 \\ 1 - m + 3 + 2m + 3n + n + 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 2n = 4 \\ m + 4n = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{12}{5} = 2,4 \\ n = -\frac{8}{5} = -1,6 \end{cases}$$

Raspuns: $m = 2,4$; $n = -1,6$.

8. Resturile impartirii polinomului $P(X)$ la binoamele $X + 2$, $X + 4$, $X - 2$ sunt respectiv 38, 112 si 10. Sa se afle restul impartirii polinomului $P(X)$ la $(X^2 - 4)(X + 4)$.

Solutie

Asa cum polinomul $(X^2 - 4)(X + 4) = X^3 + 4X^2 - 4X - 16$ are gradul 3, restul impartirii polinomului $P(X)$ la acest polinom are gradul cel mult 2, adica el va avea forma $R(X) = aX^2 + bX + c$.

Fie $C(X)$ este catul acestei impartiri. Atunci

$$P(X) = (X^2 - 4)(X + 4) \cdot C(X) + aX^2 + bX + c.$$

Avem

$$P(-2) = 0 \cdot C(X) + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 4a - 2b + c.$$

Dar din conditia problemei $P(-2) = 38$. Prin urmare, $4a - 2b + c = 38$.

In mod analog obtinem inca doua ecuatii: $16a - 4b + c = 112$ si $4a + 2b + c = 10$.
Rezolvam sistemul de ecuatii:

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 38, \\ 16a - 4b + c = 112. \\ 4a + 2b + c = 10. \end{cases}$$

Gasim $a = 5$, $b = -7$, $c = 4$. Deci, $R(X) = 5X^2 - 7X + 4$.

Raspuns: $R(X) = 5X^2 - 7X + 4$.

9. Sa se determine ordinul de multiplicatare a radacinii 1 pentru polinomul $P(X) = X^5 - 5X^4 + 14X^3 - 22X^2 + 17X - 5$.

Solutie

Avem $P(1) = 1 - 5 + 14 - 22 + 17 - 5 = 0$. Calculam $P'(X) = 5X^4 - 20X^3 + 42X^2 - 44X + 17$.
De aici,

$$P'(1) = 5 - 20 + 42 - 44 + 17 = 0.$$

Calculam $P''(X) = 20X^3 - 60X^2 + 84X - 44$,

$$P''(1) = 20 - 60 + 84 - 44 = 0.$$

Calculam $P'''(X) = 60X^2 - 120X + 84$,

$$P'''(1) = 60 - 120 + 84 = 24 \neq 0.$$

Cum $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$, $P'''(1) \neq 0$ rezulta ca $X = 1$ este radacina tripla a polinomului $P(X)$.

Raspuns: 3.

10. Polinomul $P(X) = X^4 - X^3 - 2X^2 + mX + n$ admite radacinile $x_1 = 1$ si $x_2 = 2$. Sa se determine celelalte radacini ale polinomului.

Solutie

$$P(1) = 0 \Rightarrow 1 - 1 - 2 + m + n = 0,$$

$$P(2) = 0 \Rightarrow 16 - 8 - 8 + 2m + n = 0.$$

Rezolvam sistemul $\begin{cases} m + n = 2, \\ 2m + n = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2, \\ n = 4. \end{cases}$ Deci, polinomul $P(X)$ are forma:

$$P(X) = X^4 - X^3 - 2X^2 - 2X + 4.$$

Impartim $P(X)$ la $(X - 1)(X - 2)$ si obtinem catul $C(X) = X^2 + 2X + 2$. Prin urmare, $P(X) = (X - 1)(X - 2)(X^2 + 2X + 2)$.

Rezolvam ecuatia $X^2 + 2X + 2 = 0$. Obtinem: $\begin{cases} X = -1 - i, \\ X = -1 + i. \end{cases}$

Raspuns: $-1 \pm i$.

11. Sa se determine radacinile polinomului $P(X) = X^3 + 5X^2 - 2X - 24$, daca se stie ca $x_1 + x_2 = -7$, unde x_1 si x_2 sunt doua radacini ale polinomului $P(X)$.

Solutie

Fie a treia radacina a polinomului $P(X)$ este x_3 . Au loc relatiile lui Viette:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -5, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -2, \\ x_1x_2x_3 = 24. \end{cases}$$

Din prima relatie si conditia $x_1 + x_2 = -7$ obtinem:

$$-7 + x_3 = -5 \Rightarrow x_3 = 2.$$

Pentru determinarea radacinilor x_1 si x_2 avem sistemul $\begin{cases} x_1 + x_2 = -7, \\ x_1x_2 = 12. \end{cases}$ Obtinem:

$$\left[\begin{cases} x_1 = -4, \\ x_2 = -3, \\ x_1 = -3, \\ x_2 = -4. \end{cases} \right.$$

Raspuns: $-4, -3, 2$.

12. Sa se determine radacinile polinomului $P(X) = X^3 - 15X^2 + 74X - 120$, daca se stie ca una din radacini este media aritmetica a celorlalte doua radacini.

Solutie

Fie x_1, x_2, x_3 sunt radacinile polinomului si $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Aceasta egalitate si relatiile lui Viete conduc la sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 74, \\ x_1x_2x_3 = 120, \\ x_1 + x_2 = 2x_3. \end{cases}$$

Din prima si a treia ecuatie obtinem $3x_3 = 15 \Rightarrow x_3 = 5$.

Determinam catul impartirii polinomului $P(X)$ la binomul $X - 5$, aplicand schema lui Horner:

	X^3	X^2	X^1	X^0
	1	-15	74	-120
5	1	-10	24	0

Astfel $C(X) = X^2 - 10X + 24$ si $P(X) = (X - 5)(X^2 - 10X + 24) = (X - 5)(X - 6)(X - 4)$.

Deci, polinomul $P(X)$ are radacinile 4, 6 si 5.

Raspuns: 4, 5, 6.

13. Sa se determine polinomul $P(X)$ care satisface relatia

$$2P(X) = XP(X) - 2X^3 + 10X^2 - 16X + 8.$$

Solutie

Scriem relatia data sub forma

$$(2 - X)P(X) = -2X^3 + 10X^2 - 16X + 8.$$

De aici se observa ca polinomul $P(X)$ este un polinom de gradul 2. Fie $P(X) = aX^2 + bX + c$.

Fie $X = 1$. Din relatia data obtinem:

$$(2 - 1)P(1) = -2 + 10 - 16X + 8,$$

adica $P(1) = 0$.

Fie $X = 0$. Din relatia data obtinem:

$$(2 - 0)P(0) = 8,$$

adica $P(0) = 4$.

Fie $X = -1$. Atunci $3P(-1) = -2 + 10 + 16X + 8$, adica $P(-1) = 12$.

Pentru determinarea coeficientilor a, b, c obtinem sistemul

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ c = 4, \\ a - b + c = 12. \end{cases}$$

Solutia acestui sistem este $a = 2$, $b = -6$, $c = 4$. Deci, $P(X) = 2X^2 - 6X + 4$.

Raspuns: $P(X) = 2X^2 - 6X + 4$.

Nota. Problema poate fi rezolvata si prin metoda coeficientilor nedeterminati:

$$\begin{aligned} & (2 - X)(aX^2 + bX + c) = -2X^3 + 10X^2 - 16X + 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & -aX^3 + (2a - b)X^2 + (2b - c)X + 2c = -2X^3 + 10X^2 - 16X + 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a = 2, \\ 2a - b = 10, \\ 2b - c = -16, \\ 2c = 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = -6, \\ c = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

14. Sa se determine pentru ce valori reale ale parametrului a polinomul $P(X) = X^3 + X^2 + aX + 3$ admite o radacina dubla.

Solutie

Fie radacinile x_1, x_2, x_3 ale $P(X)$ verifica relatia $x_1 = x_2$ (x_1 este radacina dubla). Scriem relatiile lui Viete pentru polinomul $P(X)$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a, \\ x_1x_2x_3 = -3. \end{cases}$$

Utilizand conditia problemei avem:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = -1, \\ x_1^2 + 2x_1x_3 = a, \\ x_1^2 \cdot x_3 = -3. \end{cases}$$

Din I-a relatia obtinem $x_3 = -1 - 2x_1$. Substituim acest x_3 in ecuatia a III-a si obtinem pentru determinarea radacinii duble x_1 ecuatia:

$$x_1^2(-1 - 2x_1) = -3 \Leftrightarrow 2x_1^3 + x_1^2 - 3 = 0.$$

Observam ca o solutie a acestei ecuatii este $x_1 = 1$, iar celelalte doua sunt solutii ale ecuatiei:

$$2x_1^2 + 3x_1 + 3 = 0.$$

Cum aceasta ecuatie nu admite solutii reale, rezulta ca $x_1 = 1$.

$$\text{Deoarece } P(1) = 0 \Rightarrow 1^3 + 1^2 + a \cdot 1 + 3 = 0 \Rightarrow a = -5.$$

Raspuns: $a = -5$.

15. Sa se determine pentru care valori ale parametrilor reali m si n polinomul $P(X) = X^4 - 7X^3 + 15X^2 + mX + n$ admite o radacina $x_1 = 3 + i\sqrt{2}$.

Solutie

Se stie ca daca un polinom $P(X)$ cu coeficienti reali admite o radacina complexa $x = a + bi$, atunci si numarul conjugat lui x : $\bar{x} = \overline{a + bi} = a - bi$ este radacina a acestui polinom.

Prin urmare, in cazul nostru, $x_2 = 3 - i\sqrt{2}$ este o radacina a polinomului $P(X)$ si polinomul $P(X)$ se divide prin

$$(X - x_1)(X - x_2) = X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1x_2 = X^2 - 6X + 11.$$

Efectuam impartirea lui $P(X)$ la $X^2 - 6X + 11$

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 7X^3 + 15X^2 + mX + n & X^2 - 6X + 11 \\ \underline{X^4 - 6X^3 + 11X^2} & \\ -X^3 + 4X^2 + mX & \\ \underline{-X^3 + 6X^2 - 11X} & \\ -2X^2 + (m+11)X + n & \\ \underline{-2X^2 \qquad \qquad + 12X - 22} & \\ (m-1)X + n + 22 & \end{array}$$

Cerem ca restul $(m-1)X + n + 22$ sa fie polinomul nul. Prin urmare, $m-1 = 0$ si $n + 22 = 0$. De aici, $m = 1$, $n = -22$.

Raspuns: $m = 1$, $n = -22$.

16. Rezolvati in \mathbb{C} ecuatia $2x^4 - x^3 - 39x^2 + 18x + 54 = 0$, daca se stie ca una din radacini este $x = 3\sqrt{2}$.

Solutie

Se stie, ca daca polinomul $P(X)$ cu coeficienti rationali are o radacina de forma $a + b\sqrt{c}$, unde $a, b, c \in \mathbb{Q}, c \geq 0$, atunci si numarul $a - b\sqrt{c}$ este radacina a acestui polinom. In plus, aceste radacini au acelasi ordin de multiplcitate.

In cazul nostru $x = 3\sqrt{2}$ este radacina a polinomului $P(X) = 2X^4 - X^3 - 39X^2 + 18X + 54$, deoarece $P(3\sqrt{2}) = 0$. Prin urmare, si numarul $-3\sqrt{2}$ este radacina a lui $P(X)$ si polinomul $P(X)$ se divide prin $(X - 3\sqrt{2})(X + 3\sqrt{2}) = X^2 - 18$.

Efectuand impartirea lui $P(X)$ la $X^2 - 18$, obtinem:

$$P(X) = (X^2 - 18)(2X^2 - X - 3) = 2(X^2 - 18)(X + 1) \left(X - \frac{3}{2} \right).$$

$$\text{Deci } 2x^4 - x^3 - 39x^2 + 18x + 54 = 0 \Leftrightarrow 2(x - 3\sqrt{2})(x + 3\sqrt{2})(x + 1) \left(x - \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3\sqrt{2}, \\ x = -1, \\ x = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Raspuns: } S = \left\{ \pm 3\sqrt{2}; -1; \frac{3}{2} \right\}.$$

17. Sa se determine λ si sa se rezolve ecuatia $x^3 - 3x + \lambda = 0$, stiind ca radacinile ei satisfac relatia $nx_1 + (n+1)x_2 + (n+2)x_3 = 0$.

Solutie

Scriem aceasta relatie in sistem cu relatiile lui Viete:

$$\begin{cases} nx_1 + (n+1)x_2 + (n+2)x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3, \\ x_1x_2x_3 = -\lambda. \end{cases}$$

Din prima si a doua ecuatie gasim:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = -2x_3. \end{cases}$$

Substituind aceste relatii in a treia ecuatie gasim: $x_3^2 = 1 \Leftrightarrow x_3 = \pm 1$.

Deci, sunt posibile doua cazuri:

$$1) x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2, \lambda = -x_1x_2x_3 = 2;$$

$$2) x_3 = -1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2, \lambda = -x_1x_2x_3 = -2.$$

$$\text{Raspuns: } \text{daca } \lambda = 2 \quad x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 1;$$

$$\text{daca } \lambda = -2 \quad x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = -1.$$

18. Sa se determine parametrii reali a si b pentru care polinomul $P(X) = X^4 + 5X^3 + 9X^2 + aX + b$ are o radacina de multiplicitatea trei.

Solutie

I metoda. Radacina tripla trebuie sa satisfaca relatiile

$$P(X) = P'(X) = P''(X) = 0, \quad P'''(X) \neq 0.$$

Deci, avem sistemul

$$\begin{cases} X^4 + 5X^3 + 9X^2 + aX + b = 0, \\ 4X^3 + 15X^2 + 18X + a = 0, \\ 12X^2 + 30X + 18 = 0, \\ 24X + 30 \neq 0. \end{cases}$$

Solutiile ecuatiei a treia $X_1 = -1, X_2 = -\frac{3}{2}$ verifica inegalitatea $24X + 30 \neq 0$.

Pentru $X_1 = -1$, din prima si a doua ecuatii gasim

$$a = 7, b = 2.$$

Analog pentru $X_2 = -\frac{3}{2}$ obtinem: $a = \frac{27}{4}, b = \frac{27}{16}$.

Raspuns: 1) $a = 7$, $b = 2$ sau 2) $a = \frac{27}{4}$, $b = \frac{27}{16}$.

II metoda. Fie radacina tripla este $x_1 = x_2 = x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$.
Scriem primele 2 relatii ale lui Viete:

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = -5, \\ 3\alpha^2 + 3\alpha\beta = 9. \end{cases}$$

Rezolvand acest sistem gasim radacinile polinomului: $\alpha = -1$, $\beta = -2$ sau $\alpha = -\frac{3}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$.

In primul caz polinomul are forma $P(X) = (X + 1)^3(X + 2) = X^4 + 5X^3 + 9X^2 + 7X + 2$;
deci $a = 7$, $b = 2$.

In al doilea caz polinomul are forma

$$P(X) = \left(X + \frac{3}{2}\right)^3 \left(X + \frac{1}{2}\right) = X^4 + 5X^3 + 9X^2 + \frac{24}{7}X + \frac{27}{16};$$

deci, $a = \frac{27}{4}$, $b = \frac{27}{16}$.

19. Caturile impartirii polinomului $P(X)$ la binoamele $X - a$ si $X - b$ sunt respectiv $X^2 - 3X + 4$ si $X^2 - 4X + 2$. Sa se determine numerele a , b si polinomul $P(X)$, daca termenul liber al polinomului este 1.

Solutie

I metoda. Din datele problemei rezulta ca $P(X)$ poate fi scris in doua moduri:
 $P(X) = (X - a)(X^2 - 3X + 4) + R_1$ si $P(X) = (X - b)(X^2 - 4X + 2) + R_2$.

Deoarece termenul liber este egal cu 1 rezulta ca $1 = P(0) = R_1 - 4a = R_2 - 2b \Leftrightarrow$

$$R_1 - R_2 = 4a - 2b. \quad (*)$$

Avem $P(1) = (1 - a) \cdot 2 + R_1 = (1 - b)(-1) + R_2 \Leftrightarrow$

$$R_1 - R_2 = 2a + b - 3. \quad (**)$$

De asemenea $P(2) = (2 - a) \cdot 2 + R_1 = (2 - b)(-2) + R_2 \Leftrightarrow$

$$R_1 - R_2 = 2a + 2b - 8. \quad (***)$$

Scazand din (*) pe (**) si din (**) pe (***), obtinem:

$$\begin{cases} 2a - 3b + 3 = 0, \\ -b + 5 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6, \\ b = 5. \end{cases}$$

Prin urmare, $R_1 = 1 + 4a = 25$. Polinomul $P(X)$ are forma

$$P(X) = (X - 6)(X^2 - 3X + 4) + 25 = X^3 - 9X^2 + 22X + 1.$$

Raspuns: $a = 6$, $b = 5$, $P(X) = X^3 - 9X^2 + 22X + 1$.

II metoda. Problema poate fi rezolvata si astfel.

Avem

$$P(X) = (X - a)(X^2 - 3X + 4) + R_1 = X^3 - (a + 3)X^2 + (3a + 4)X + R_1 - 4a$$

si

$$P(X) = (X - b)(X^2 - 4X + 2) + R_2 = X^3 - (b + 4)X^2 + (4b + 2)X + R_2 - 2b.$$

Cum doua polinoame sunt identice doar daca sunt egali coeficientii respectivi, obtinem sistemul:

$$\begin{cases} a + 3 = b + 4, \\ 3a + 4 = 4b + 2, \\ R_1 - 4a = R_2 - 2b = 1. \end{cases}$$

De aici gasim: $a = 6$, $b = 5$, $R_1 = 25$. Deci, $P(X) = X^3 - 9X^2 + 22X + 1$.

Doritorii de a se perfectiona in rezolvarea exercitiilor referitoare la polinoame pot gasi exemple rezolvate si exemple propuse spre rezolvare in urmatoarele surse accesibile:

1. I.Achiri, V.Ciobanu, P.Efros s. a. Matematica. Manual pentru clasa a XII-a, Prut International, 2005;
2. I.Achiri, V.Ciobanu, P.Efros s. a. Matematica. Culegere de exercitii si probleme pentru clasa a XII-a, Prut International, 2005.