Elipsa

Elipsa este multimea punctelor planului, suma distantelor carora pana la doua puncte date F_1 si F_2 (**focare**) este o marime constanta egala cu $2a$, mai mare decat distanta $F_1F_2 = 2c > 0$.

Ecuatia canonica a elipsei este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

unde

$$b^2 = a^2 - c^2. \tag{2}$$

Marimea $e = \dfrac{c}{a} < 1$ se numeste **excentricitate** a elipsei. Distantele MF_1 si MF_2 de la punctul M al elipsei la focarele ei se numesc **raze focale** si se calculeaza dupa formulele $MF_1 = r_1 = a + ex, \quad MF_2 = r_2 = a - ex.$

Probleme rezolvate

1. Sa se scrie ecuatia canonica a elipsei care trece prin punctele $M\left(\sqrt{5}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ si $N\left(-2, \sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)$.

<u>Solutie</u>

Fie ca ecuatia elipsei este $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Cum coordonatele punctelor date verifica ecuatia elipsei, obtinem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{5}{a^2} + \dfrac{1}{2b^2} = 1 \\[2ex] \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{3}{5b^2} = 1 \end{cases}$$

solutiile caruia sunt $a^2 = 100$, $b^2 = 1$ si ecuatia elipsei este $\dfrac{x^2}{10} + y^2 = 1$.

2. Sa se gaseasca punctele elipsei $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, daca modulul diferentei razelor focale ale acestor puncte este egal cu 24.

<u>Solutie</u>

Deoarece $a = 5, b = 3, c = \sqrt{25 - 9} = 4$, avem

$$|r_1 - r_2| = \left|a + \frac{c}{a}x - \left(a - \frac{c}{a}x\right)\right| = 2 \cdot \frac{c}{a}|x| = 2 \cdot \frac{4}{5}|x| = \frac{8}{5}|x|.$$

Din conditia problemei $\dfrac{8}{5}|x| = \dfrac{24}{5} \Rightarrow |x| = 3$ sau $x = \pm 3$. Din ecuatia elipsei $y^2 = 9\left(1 - \dfrac{x^2}{25}\right) \Rightarrow y^2 = 9\left(1 - \dfrac{9}{25}\right) \Rightarrow y = \pm\dfrac{12}{5}$.

Am obtinut patru puncte $\left(\pm 3, \pm\dfrac{12}{5}\right)$.

3. Sa se scrie ecuatia canonica a elipsei care trece prin punctul $M(2, 2)$ si are excentricitatea $e = \dfrac{4}{5}$.

Solutie

Cautam ecuatia elipsei sub forma (1). Din $\frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow c = \frac{4}{5} \cdot a \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - \frac{16}{25} \cdot a^2 = \frac{9}{25} \cdot a^2$.

Deci ecuatia elipsei are forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{9}{25} \cdot a^2} = 1$. Cum $M(2,2)$ apartine elipsei, obtinem $\frac{4}{a^2} + \frac{100}{9a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{136}{9}$ si $b^2 = \frac{136}{25}$.

Astfel ecuatia elipsei este $9x^2 + 25y^2 = 136$.

4. Sa se scrie ecuatia tangentei la elipsa $16x^2 + 25y^2 = 41$ in punctul $M(1,1)$.

Solutie

Ecuatia tangentei la elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ in punctul $M_0\left(x_0, y_0\right)$ are forma $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1$. Utilizand aceasta formula si datele problemei, gasim ecuatia ceruta $16x + 25y - 41 = 0$.

5. Sa se determine conditia ca dreapta $y = kx + m$ si elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sa fie tangente.

Solutie

Pentru ca dreapta data si elipsa sa fie tangente trebuie ca sistemul de ecuatii

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ y = kx + m \end{cases}$$

sa aiba doua solutii care coincid, iar pentru aceasta trebuie ca discriminantul ecuatiei patrate in x $b^2x^2 + a^2\left(kx + m\right)^2 - a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow \left(b^2 + a^2k^2\right)x^2 + 2a^2kmx + a^2m^2 - a^2b^2 = 0$ sa fie nul. De aici se obtine conditia de tangenta: $a^2k^2 + b^2 = m^2$.

6. Pentru care valori ale parametrului real m dreapta $y = 2x + m$ si elipsa $4x^2 + 25y^2 = 100$ sunt tangente?

Solutie

In acest caz $k = 2, a^2 = 25, b^2 = 4$ si, conform problemei precedente, pentru $m = \pm\sqrt{104} = \pm 2\sqrt{26}$ dreapta data si elipsa sunt tangente.

7. Sa se scrie ecuatiile tangentelor la elipsa $x^2 + 4y^2 = 20$ paralele cu dreapta $x + y + 7 = 0$.

Solutie

Tangentele cerute in enunt vor avea ecuatia $y = -x + m$ si pentru $k = -1, a^2 = 20, b^2 = 5$ obtinem $m = \pm\sqrt{20 + 5} = \pm 5$. Deci ecuatiile tangentelor paralele cu dreapta $x + y + 7 = 0$ sunt $x + y \pm 5 = 0$.

8. Sa se scrie ecuatiile tangentelor la elipsa $4x^2 + 5y^2 = 120$ perpendiculare pe dreapta $2x + 4y - 7 = 0$.

Solutie

Panta dreptei date $k = -\dfrac{1}{2}$ si astfel dreptele perpendiculare pe ea au panta egala cu 2. Procedind ca in problema precedenta, gasim ecuatiile cerute: $y = 2x \pm 12$.

9. Sa se scrie ecuatia elipsei $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ cu un varf de coordonate $(3, 0)$, tangenta la dreapta $x + 2y + 6 = 0$. Sa se afle punctul de tangenta.

Solutie

Faptul ca $(3, 0)$ este un varf al elipsei imlpica $\dfrac{9}{a^2} = 1$, adica $a^2 = 9$. Prin urmare, ecuatia elipsei are forma $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Fie $M_0\,(x_0, y_0)$ este punctul de tangenta al dreptei date cu elipsa. Ecuatia tangentei in M_0 la elipsa este $\dfrac{x_0}{9}x + \dfrac{y_0}{b^2}y = 1$ si ea trebuie sa coincida cu ecuatia $\dfrac{x}{-6} + \dfrac{y}{-3} = 1$. Deci x_0, y_0, b^2 se obtin, rezolvind sistemul

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 + 6 = 0 \\ \dfrac{x_0}{9} = -\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{y_0}{b^2} = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

De aici $x_0 = -\dfrac{3}{2}, y_0 = -\dfrac{9}{4}, b^2 = \dfrac{27}{4}$. Am obtinut ecuatia elipsei $3x^2 + 4y^2 = 27$ si punctul de tangenta $M_0\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$.

10. Sa se scrie ecuatia suportului coardei elipsei $16x^2 + 25y^2 = 400$ al carei mijloc este punctul de coordonate $(2; 0, 8)$ si sa se afle punctele de intersectie cu elipsa.

Solutie

Fie M si N sunt extremitatile coardei cerute. Daca $M(p, q)$, atunci $N(4 - p; 1, 6 - q)$. Deoarece M si N apartin elipsei, necunoscutele p si q se gasesc, rezolvind sistemul

$$\begin{cases} 16p^2 + 25q^2 = 400 \\ 16\,(4 - p)^2 + 25\,(1, 6 = q)^2 = 400. \end{cases}$$

Se obtin punctele $M(0, 4)$ si $N(4, -2, 4)$.

Ecuatia coardei $MN : 8x + 5y - 20 = 0$.

Probleme propuse

1. Sa se scrie ecuatia elipsei cu focarele situate pe axa absciselor, simetrice fata de originea sistemului de axe ortogonale, daca:

a) $a = 6, b = 5$;

b) $2a = 26, 2c = 10$;

c) $2b = 12, 2c = 16$;

d) $2c = 12, e = 0, 6$;

e) $2b = 4\sqrt{5}, e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$;
f) elipsa trece prin punctele $(2,3)$ si $(6,2)$;
g) elipsa trece prin punctul $(1,1)$ si $e = \dfrac{3}{5}$;
h) elipsa trece prin punctul $(3,-2)$ si are un varf $(5,0)$;
i) elipsa trece prin punctul $(4,-1)$ si un focar este $(-3,0)$.

2. Sa se determine punctele elipsei $4x^2 + 9y^2 = 180$ a caror ordonata este egala cu 4.

3. Sa se determine punctele elipsei $4x^2 + 25y^2 = 100$ a caror abscisa este egala cu -3.

4. Sa se determine razele focale ale punctului $M(-2,2)$ al elipsei $x^2 + 4y^2 = 20$.

5. Sa se scrie ecuatiile dreptelor care contin razele focale ale punctului $M(-3,4)$ al elipsei $4x^2 + 9y^2 = 180$.

6. Sa se afle punctele elipsei $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ situate la distanta egala cu 7 de la focarul stang.

7. Se da elipsa $x^2+9y^2 = 36$ si dreptele $x-3y+6 = 0$, $x-y-7 = 0$, $\sqrt{3}x+3y-12 = 0$. Sa se determine care dintre aceste drepte intersecteaza elipsa in doua puncte distincte, este tangenta la elipsa, nu intersecteaza elipsa. Sa se gaseasca punctele de intersectie si punctul de tangenta(in cazurile respective).

8. Sa se determine punctele elipsei $6x^2 + 5y^2 = 74$ ale caror coordonate sunt numere intregi.

9. Sa se determine ecuatia coardei elipsei $x^2 + 4y^2 = 9$ al carei mijloc este punctul $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$.

10. Sa se scrie ecuatia elipsei cu focarele $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$, tangenta la dreapta $9x + 20y + 75 = 0$.

11. Sa se scrie ecuatiile laturilor patratului circumscris elipsei $x^2 + 2y^2 = 6$.

12. Sa se scrie ecuatiile tangentelor la elipsa $3x^2 + 8y^2 = 45$ situate la distanta 3 de centrul elipsei.