

Inecuatii exponentiale

La rezolvarea inecuatilor exponentiale se utilizeaza urmatoarele afirmatii (a se vedea, de exemplu, [2])

A.1. Daca $a > 1$, inecuatia

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

este echivalenta cu inecuatia

$$f(x) > g(x),$$

adica semnul inecuatiei nu se schimba.

Similar

$$\begin{cases} a^{f(x)} < a^{g(x)} \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) < g(x).$$

A.2. Daca $0 < a < 1$, inecuatia

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

este echivalenta cu inecuatia

$$f(x) < g(x),$$

adica semnul inecuatiei se schimba in opus.

Similar

$$\begin{cases} a^{f(x)} < a^{g(x)} \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) > g(x).$$

A.3. Inecuatia

$$[h(x)]^{f(x)} > [h(x)]^{g(x)} \tag{1}$$

este echivalenta cu totalitatea de sisteme

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} h(x) > 1, \\ f(x) > g(x), \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) < g(x). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Nota. Daca semnul inecuatiei (1) nu este strict, se mai considera si cazul

$$\begin{cases} h(x) = 1, \\ x \in D(f) \cap D(g). \end{cases}$$

unde $D(f)$ ($D(g)$) desemneaza domeniul de definitie al functiei f (g).

A.4. Inecuatia

$$a^{f(x)} < b$$

unde $b \leq 0$, nu are solutii (rezulta din proprietatile functiei exponentiale).

A.5. Inecuatia $a^{f(x)} > b$, unde $b \leq 0$ are solutiile $x \in D(f)$.

A.6. Daca $a > 1$, inecuatia

$$a^{f(x)} > b$$

unde $b > 0$, este echivalenta cu inecuatia

$$f(x) > \log_a b.$$

Similar

$$a^{f(x)} < b \Leftrightarrow f(x) < \log_a b.$$

A.7. Daca $0 < a < 1$, inecuata

$$a^{f(x)} > b$$

unde $b > 0$, este echivalenta cu inecuata

$$f(x) < \log_a b.$$

Similar

$$a^{f(x)} < b \Leftrightarrow f(x) > \log_a b.$$

Exemplul 1. Sa se rezolve inecuatiile:

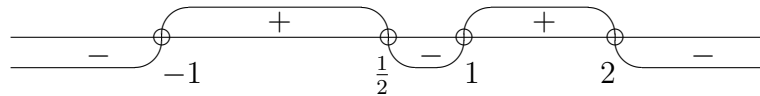
$$\begin{array}{ll} a) 2^{\frac{2}{x^2-1}} > 2^{\frac{1}{x-2}}, & e) 2^x < -4, \\ b) (0.3)^{|2x-3|} < (0.3)^{|3x+4|}, & f) 2^x > -4, \\ c) (4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} > 1, & g) 5^{x^2-2x+3} < 7, \\ d) (x^2 - x + 1)^x \leq 1, & h) 2^{\frac{\sqrt{x-3}}{x-8}} > -4. \end{array}$$

Rezolvare. a) Cum $2 > 1$, se utilizeaza afirmatia **A.1** si se obtine inecuata

$$\frac{x}{x^2-1} > \frac{1}{x-2},$$

care se rezolva prin metoda intervalelor (a se vedea [1],[2]), adica

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2-1} > \frac{1}{x-2} &\Leftrightarrow \frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2) - (x^2-1)}{(x^2-1)(x-2)} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1-2x}{(x-1)(x+1)(x-2)} > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; \frac{1}{2}) \cup (1; 2). \end{aligned}$$



b) Cum $0 < 0.3 < 1$ se utilizeaza afirmatia **A.2** si se obtine inecuata

$$|2x - 3| > |3x + 4|,$$

care se rezolva utilizand proprietatile modului ([1],[2]), si anume $|a| > |b| \Leftrightarrow (a-b)(a+b) > 0$. Astfel

$$|2x - 3| > |3x + 4| \Leftrightarrow ((2x - 3) - (3x + 4))((2x - 3) + (3x + 4)) > 0 \Leftrightarrow (-x - 7)(5x + 1) > 0.$$

Ultima inecuatie se rezolva cu ajutorul metodei intervalelor si se obtine $x \in (-7; -\frac{1}{5})$.

c) Se utilizeaza afirmatia **A.3** si se obtine

$$\begin{aligned}
 (4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} > 1 &\Leftrightarrow (4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} > (4x^2 + 2x + 1)^0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 4x^2 + 2x + 1 > 1, \\ x^2 - x > 0, \\ 4x^2 + 2x + 1 < 1, \\ 4x^2 + 2x + 1 > 0, \\ x^2 - x < 0 \end{cases} \right. &\Leftrightarrow \left[\begin{cases} \left[\begin{cases} x > 0, \\ x < -\frac{1}{2}, \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} x > 1, \\ x < 0, \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} x \in (-\frac{1}{2}; 0), \\ x \in \mathbf{R}, \\ x \in (0; 1). \end{cases} \right. \end{cases} \right. \\
 &\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (1; +\infty), \\ x \in \emptyset \end{cases} \right. \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (1; +\infty).
 \end{aligned}$$

d) Se tine seama de nota la afirmatia **A.3** si se obtine

$$\begin{aligned}
 (x^2 - 2 + 1)^x \leq 1 &\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)^x \leq (x^2 - x + 1)^0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x^2 - x + 1 > 1, \\ x \leq 0, \\ x^2 - x + 1 < 1, \\ x^2 - x + 1 > 0, \\ x \geq 0, \\ x \in D(f) \cap D(g) = \mathbf{R}, \\ x^2 - x + 1 = 1. \end{cases} \right. &\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x < 0, \\ 0 < x < 1, \\ x = 0, x = 1. \end{cases} \right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1].
 \end{aligned}$$

e) Conform afirmatiei **A.4** avem $x \in \emptyset$.

f) Se utilizeaza afirmatia **A.5** si se obtine $x \in \mathbf{R}$.

g) Utilizand afirmatia **A.6** se obtine

$$x^2 - 2x + 3 < \log_5 7.$$

Cum $x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2 \geq 2$, iar $\log_5 7 < \log_5 25 = 2$, rezulta ca aceasta inecuatie nu are solutii.

h) Multimea solutiilor inecuatiei se determina din sistemul (ce reprezinta *DVA* al inecuatiei):

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0, \\ x - 8 \neq 8. \end{cases}$$

Din ultimul sistem se obtine $x \in [3; 8) \cup (8; +\infty)$.

Mentionam, ca toate procedeele de rezolvare a ecuatiilor exponentiale pot fi aplicate (cu modificarile respective) si in cazul inecuatiilor exponentiale.

Exemplul 2. Sa se rezolve inecuatiile

a) $5^{2x+1} > 5^x + 4,$

b) $5 \cdot 9^x - 18 \cdot 15^x + 9 \cdot 25^x > 0,$

c) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2},$

d) $4^{x^2-x} - 10 \cdot 2^{x^2} + 2^{2x+4} \geq 0,$

e) $\frac{1}{3^x + 5} \leq \frac{1}{3^{x+1} - 1},$

f) $3x + 12 \cdot 3^{\sqrt{x}} \geq 4x \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9.$

Rezolvare. a) Cum $5^{2x+1} = 5 \cdot (5^x)^2$, se noteaza $t = 5^x$ si se obtine inecuatiya patrata

$$5t^2 - t - 4 > 0$$

cu solutiile $t < -\frac{4}{5}$ sau $t > 1$. Cum $t > 0$ ramane $t > 1$, adica $5^x > 1$, de unde $x > 0$.

b) Se observa ca inecuatiya este omogena si impartind la 25^x se obtine inecuatiya

$$5 \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^x - 18 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 9 > 0.$$

Se noteaza $t = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ si se obtine inecuatiya patrata

$$5t^2 - 18t + 9 > 0,$$

de unde deducem $t < \frac{3}{5}$ sau $t > 3$. Asadar

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{3}{5}, \\ \left(\frac{3}{5}\right)^x > 3. \end{cases}$$

Se tine seama ca $0 < \frac{3}{5} < 1$ si se obtin solutiile $x > 1$ sau $x < \log_{\frac{3}{5}} 3$. Asadar solutiile inecuatiei formeaza multimea $x \in (-\infty; \log_{\frac{3}{5}} 3) \cup (1; +\infty)$.

c) Se utilizeaza metoda factorului comun si se obtine

$$\begin{aligned} 2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2} &\Leftrightarrow 2^x \cdot 4 - 2^x \cdot 8 - 2^x \cdot 16 > 5^x \cdot 5 - 5^x \cdot 25 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2^x(4 - 8 - 16) > 5^x(5 - 25) &\Leftrightarrow 2^x \cdot (-20) > 5^x \cdot (-20) \Leftrightarrow 2^x < 5^x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2^x}{5^x} < 1 &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^0 \Leftrightarrow x > 0. \end{aligned}$$

d) Se divide inecuatiya cu 2^{2x} si se obtine

$$4^{x^2-2x} - 10 \cdot 2^{x^2-2x} + 16 \geq 0,$$

se noteaza $t = 2^{x^2-2x}$ si se rezolva inecuatiya patrata

$$t^2 - 10t + 16 \geq 0,$$

solutiile careia sunt $t \leq 2$ sau $t \geq 8$. Asadar

$$\begin{cases} 2^{x^2-2x} \leq 2, \\ 2^{x^2-2x} \geq 8, \end{cases}$$

de unde rezulta

$$\begin{cases} x^2 - 2x \leq 1, \\ x^2 - 2x \geq 3. \end{cases}$$

Solutiile primei inecuatii a totalitatii sunt $x \in [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$, iar a inecuatiei secunde $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Astfel $x \in (-\infty; -1] \cup [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}] \cup [3; +\infty)$.

e) Se noteaza $t = 3^x$ si se utilizeaza metoda intervalelor (se tine seama ca $t + 5 > 0$):

$$\frac{1}{t+5} \leq \frac{1}{3t-1} \Leftrightarrow \frac{3t-1-t-5}{3t-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2(t-3)}{3t-1} \leq 0 \Leftrightarrow t \in \left(\frac{1}{3}; 3\right].$$

Astfel $\frac{1}{3} < 3^x \leq 3 \Leftrightarrow 3^{-1} < 3^x \leq 3^1 \Leftrightarrow x \in (-1; 1]$.

f) Se grupeaza convenabil, si se obtine

$$\begin{aligned} 3x + 12 \cdot 3^{\sqrt{x}} \geq 4x \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 &\Leftrightarrow (3x - 9) + (12 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 4x \cdot 3^{\sqrt{x}}) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3(x - 3) - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}}(x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(3 - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}}) \geq 0. \end{aligned}$$

Cum $3^{\sqrt{x}} \geq 1$ rezulta $3 - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} \leq -1$ si astfel se obtine $x - 3 \leq 0$, de unde $x \leq 3$. Se tine seama de DVA al inecuatiei: $x \geq 0$ si se obtine raspunsul $x \in [0; 3]$.

In cele ce urmeaza se enunta cateva exemple de inecuatii exponentiale ce se rezolva prin metode speciale: tinand seama de domeniul de definitie si variatie, de monotonie, continuitate etc. (a se vedea [2]).

Exemplul 3. Sa se rezolve inecuatiiile:

$$\begin{aligned} a) \sqrt{4 - 2^{x-2}} < \log_2(x - 5) & \qquad d) (\sqrt{5} + 2)^{x-1} \geq (\sqrt{5} - 2)^{\frac{x-1}{x+1}} \\ b) 3^x + 4^x \geq 25 & \qquad e) 3^{\sqrt[12]{x-1}} + 3^{\sqrt[4]{x-1}} \geq 2 \cdot 3^{\sqrt[6]{x-1}} \\ c) \left(\frac{2x^2}{x^4 + 1}\right)^{3x^2-x} > \left(\frac{x^4 + 1}{2x^2}\right)^{2x-2} & \end{aligned}$$

Rezolvare. a) DVA a inecuatiei se determina rezolvand sistemul

$$\begin{cases} x - 5 > 0, \\ 4 - 2^{x-2} \geq 0. \end{cases}$$

Se obtine

$$\begin{cases} x > 5, \\ x \leq 4, \end{cases}$$

adica DVA a inecuatiei este o multime vida si, prin urmare, inecuatia data nu are solutii.

b) Membrul din stanga inecuatiei reprezinta o functie crescatoare (ca suma a doua functii crescatoare). Cum pentru $x < 2$ avem $f(x) < f(2) = 25$, iar pentru $x \geq 2$ avem $f(x) \geq f(2) = 25$, rezulta ca multimea solutiilor inecuatiei este multimea $[2; +\infty)$.

c) Se observa ca expresia $a^b - a^c$ pentru $a > 1$ este de acelasi semn cu expresia $(b - c)$, si de semne contrare, daca $0 < a < 1$, rezulta ca pentru $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ expresia $a^b - a^c$ si $(a - 1)(b - c)$ sunt de acelasi semn.

4. $\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2-2x} \geq 1.$
5. $4 \cdot 3^{x+2} - 2 \cdot 5^{x+2} \leq 5^{x+3} - 3^{x+3}.$
6. $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}.$
7. $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 < 0.$
8. $2 \cdot 3^{2x^2} + 4 \leq 3^{x^2+2}.$
9. $4^{\sqrt{9-x^2}} + 2 < 9 \cdot 2^{\sqrt{9-x^2}}.$
10. $5 \cdot 9^x - 18 \cdot 15^x + 9 \cdot 25^x > 0.$
11. $(\sqrt{5} + 2)^{x+1} \geq (\sqrt{5} - 2)^{\frac{x+1}{x-1}}.$
12. $\frac{2^{x+1} - 22}{2^x - 2} \geq 1.$
13. $\frac{5}{2^{x+2} - 1} > \frac{1}{2^x - 1}.$
14. $\sqrt{7 + 2^{1-x}} \geq 7 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}.$
15. $3x + 12 \cdot 3^{\sqrt{x}} \geq 4x \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9.$
16. $(x^2 - x + 1)^{x^2-2,5x+1} < 1.$
17. $\sqrt{13^x - 5} \leq \sqrt{2(13^x + 12)} - \sqrt{13^x + 5}.$
18. $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} \geq 1.$
19. $8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x+1}} \geq 9^{\sqrt{x}}.$
20. $|2^{4x^2-1} - 5| \leq 3.$

Bibliografie

1. P. Cojuhari, A. Corlat. Ecuatii si inecuatii algebrice. Mica biblioteca a elevului. Seria matematica si informatica. Editura ASRM. Chisinau, 1995.
2. P. Cojuhari. Ecuatii si inecuatii. Teorie si practica. Chisinau, Universitas, 1993.