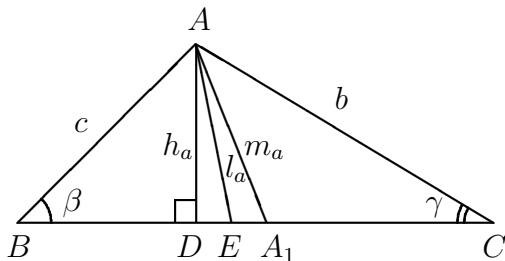


Geometria triunghiului

Formule de baza pentru triunghiuri

I. Triunghiul arbitrar

Fie $\triangle ABC$.



Notam prin:

a, b, c – lungimile laturilor BC, AC , respectiv AB ;

α, β, γ – marimile unghiurilor opuse laturilor BC, AC , respectiv AB ;

$$p = \frac{a + b + c}{2};$$

R – raza cercului circumscris;

r – raza cercului inscris;

A – aria triunghiului;

h_a, m_a, l_a – lungimile inaltimii, medianei, respectiv bisectoarei duse din varful A .

In aceste notatii:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ;$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (\text{teorema cosinusurilor});$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad (\text{teorema sinusurilor});$$

$$A = \frac{1}{2} a \cdot h_a; \quad A = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha; \quad A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{formula lui Heron});$$

$$r = \frac{A}{p}; \quad R = \frac{abc}{4A};$$

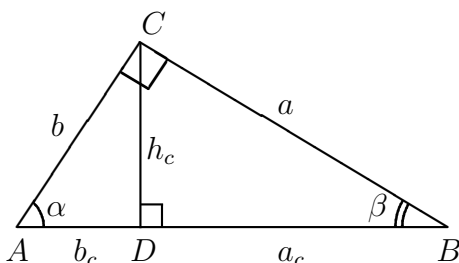
$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2};$$

$$\frac{b}{c} = \frac{EC}{BE} \quad (\text{proprietatea bisectoarei});$$

$$l_a = \sqrt{b \cdot c - BE \cdot EC}; \quad l_a = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}.$$

II. Triunghiul dreptunghic

Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle C) = 90^\circ$.



Notam catetele prin a, b , ipotenuza prin c , proiectiile catetelor pe ipotenuza prin a_c, b_c . Atunci:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{teorema lui Pitagora});$$

$$A = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} c \cdot h_c;$$

$$r = \frac{a + b - c}{2}; \quad R = \frac{c}{2};$$

$$a = c \sin \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{ctg} \beta;$$

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c \quad (\text{teorema inaltimii}); \quad b^2 = c \cdot b_c, \quad a^2 = c \cdot a_c \quad (\text{teorema catetei}).$$

III. Triunghiul echilateral cu latura a

$$A = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4};$$

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}; \quad R = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

IV. Cateva proprietati

Triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul $A_1B_1C_1$ (notatie $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$) daca si numai daca are loc una dintre urmatoarele conditii echivalente:

- 1° $m(\angle A) = m(\angle A_1)$ si $m(\angle B) = m(\angle B_1)$ (criteriul 1);
- 2° $|AB| : |BC| = |A_1B_1| : |B_1C_1|$ si $m(\angle B) = m(\angle B_1)$ (criteriul 2);
- 3° $|AB| : |BC| : |CA| = |A_1B_1| : |B_1C_1| : |C_1A_1|$ (criteriul 3).

Linia mijlocie care uneste mijloacele a doua laturi a triunghiului este paralela cu latura a treia si este egala cu jumatate din lungimea acestei laturi.

Bisectoarele triunghiului sunt concurente in centrul cercului inscris in triunghi.

Mediatoarele laturilor triunghiului (dreptele care trec prin mijloacele laturilor perpendicular pe laturi) sunt concurente in centrul cercului circumscris triunghiului.

Medianele triunghiului sunt concurente intr-un punct, numit **centru de greutate** al triunghiului, si se impart in punctul de concurenta in raportul 2:1 considerand de la varf.

Inaltimile triunghiului sunt concurente intr-un punct, numit **ortocentrul** triunghiului.

Unele recomandari utile pentru rezolvarea problemelor de geometrie

1. Se citeste cu atentie enuntul problemei, uneori de doua, trei ori, pentru a intelege sensul fiecarei fraze si fiecarui cuvint ce se contine in enunt. Astfel putem depista proprietatile "ascunse" intr-o fraza, sau cuvint ale obiectelor geometrice din problema. De exemplu, fie problema: Un punct de pe ipotenuza unui triunghi dreptunghic este egal departat de catete si imparte ipotenuza in segmente de lungimi 30 cm si 40 cm. Sa se afle catetele triunghiului.

Fraza "punctul este egal departat de catete" contine informatia ca punctul apartine bisectoarei unghiului drept. Prin urmare, la rezolvarea problemei putem aplica proprietatea bisectoarei unghiului triunghiului.

2. Se deseneaza cu acuratete figura din enunt, astfel incat ea sa corespunda datelor problemei. Unele date ale problemei se noteaza pe desen.

3. O mare importanta o are determinarea marimii care se ia ca necunoscuta cu ajutorul careia se pot deduce alte marimi cerute.

4. Dupa efectuarea unei operatii (logice sau de calcul) se face imediat verificarea.

5. După rezolvarea problemei se face discuția problemei, adică se studiază dacă problema are întotdeauna soluție; dacă are, atunci este ea unică s. a.

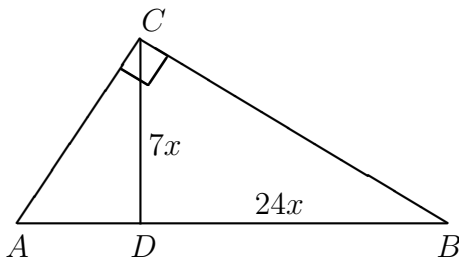
6. Orice problemă rezolvată se include în bagajul de cunoștințe necesare pentru rezolvarea altor probleme mai dificile. Din acest bagaj fac parte în mod necesar teoreme și formule elementare.

7. Pentru a putea rezolva probleme de geometrie trebuie să rezolvăm cât mai multe probleme de geometrie.

Probleme rezolvate

1. Ipoteza unui triunghi dreptunghic este egală cu 50 m, iar înălțimea relativă la ipoteza se raportează la proiecția celei mai mari catete pe ipoteza ca 7:24. Să se afle catetele triunghiului.

Soluție



Fie $\triangle ABC$ din condițiile problemei dreptunghic în C și D – proiecția lui C pe AB . Conform enunțului problemei putem pune $CD = 7x$, $DB = 24x$. Atunci $AD = 50 - 24x$.

Conform teoremei înălțimii $CD^2 = AD \cdot DB$. Deci, $49x^2 = 24x(50 - 24x)$. Rezolvăm ecuația și obținem $x = \frac{48}{25}$.

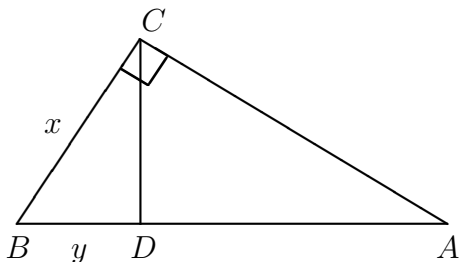
Din triunghiul dreptunghic CDB găsim $CB^2 = CD^2 + DB^2 = 49x^2 + (24x)^2 = 625x^2$. De aici $CB = 25x = 25 \cdot \frac{48}{25} = 48$.

Conform teoremei lui Pitagora, din $\triangle ACB$, obținem: $AC = \sqrt{50^2 - 48^2} = \sqrt{2 \cdot 98} = 14$.

Răspuns: 14 m, 48 m.

2. Suma unei catete și a proiecției sale pe ipoteza este egală cu 24 cm, iar diferența lor este egală cu 6 cm. Să se afle laturile triunghiului.

Soluție



Notăm în triunghiul dreptunghic ABC cateta BC prin x , iar proiecția ei pe ipoteza, segmentul BD , prin y . Atunci conform ipotezei x și y verifică sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y = 24, \\ x - y = 6. \end{cases}$

Rezolvând sistemul, obținem $x = 15$, $y = 9$.

Conform teoremei catetei $x^2 = y \cdot AB$. De aici $AB = \frac{x^2}{y} = \frac{15^2}{9} = 25$.

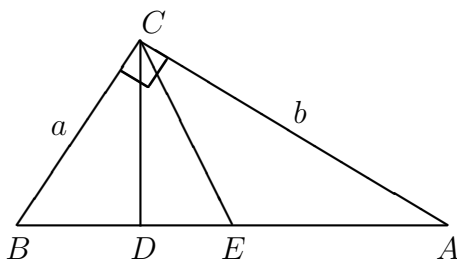
Conform teoremei lui Pitagora

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20.$$

Raspuns: $BC = 15$ cm, $AC = 20$ cm, $AB = 25$ cm.

3. Catetele si ipotenuza unui triunghi dreptunghic au lungimile egale respectiv cu a, b si c . Inaltimea si mediana triunghiului duse din varful unghiului drept, impart acest triunghi in trei triunghiuri. Sa se afle ariile acestor triunghiuri.

Solutie



Fie ABC triunghiul dat, in care $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ si fie $a < b$. Ducem inaltimea CD si mediana CE . Deoarece $A_{\triangle ABC} = \frac{ab}{2}$ si mediana oricarui triunghi imparte triunghiul in doua triunghiuri de arii egale, rezulta ca

$$A_{\triangle ACE} = A_{\triangle BCE} = \frac{ab}{4}.$$

Cum $\triangle CDB \sim \triangle ACB$ si coeficientul de asemanare este $k = \frac{a}{c}$, obtinem:

$$A_{\triangle CDB} = k^2 \cdot A_{\triangle ACB} = \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{ab}{2} = \frac{a^3b}{2c^2}.$$

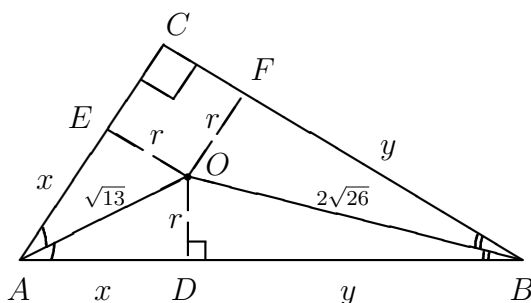
In sfarsit,

$$A_{\triangle CDE} = A_{\triangle BCE} - A_{\triangle CDB} = \frac{ab}{4} - \frac{a^3b}{2c^2} = \frac{ab(b^2 - a^2)}{4c^2}.$$

Raspuns: $\frac{ab}{4}$, $\frac{a^3b}{2c^2}$, $\frac{ab(b^2 - a^2)}{4c^2}$ ($a < b$).

4. Centrul cercului inscris intr-un triunghi dreptunghic este situat la distantele $\sqrt{13}$ cm si $2\sqrt{26}$ cm de varfurile unghiurilor ascutite. Sa se afle laturile triunghiului.

Solutie



Fie O centrul cercului inscris in triunghiul dreptunghic ABC , $m(\angle C) = 90^\circ$.

Cum centrul cercului inscris intr-un triunghi este punctul de intersectie al bisectoarelor unghiurilor triunghiului, rezulta ca $m(\angle OAB) + m(\angle OBA) = \frac{1}{2}(m(\angle A) + m(\angle B)) = 45^\circ$.

Prin urmare, $m(\angle AOB) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Conform teoremei cosinusurilor, din $\triangle AOB$, obtinem:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos 135^\circ \Leftrightarrow AB^2 = 13 + 4 \cdot 26 - 2 \cdot \sqrt{13} \cdot 2\sqrt{26} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 13 + 8 \cdot 13 + 4 \cdot 13 = 13(1 + 8 + 4) = 13 \cdot 13. \text{ Deci, } AB = c = 13.$$

Fie raza cercului inscris in $\triangle ABC$ este r , $AE = x$, $BF = y$. Atunci $AD = x$, $BD = y$.

Avem:

$$\begin{cases} r^2 + x^2 = 13 \\ r^2 + y^2 = 4 \cdot 26 \\ (r+x)^2 + (r+y)^2 = 13^2 \\ x+y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 + x^2 = 13 \\ r^2 + y^2 = 8 \cdot 13 \\ 2r(x+y) = 13^2 - 9 \cdot 13 \\ x+y = 13 \end{cases} \Rightarrow 2r \cdot 13 = 4 \cdot 13 \Rightarrow r = 2.$$

Prin urmare,

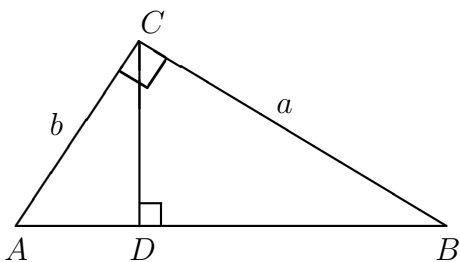
$$x = \sqrt{AO^2 - r^2} = \sqrt{13 - 4} = 3, \quad y = \sqrt{4 \cdot 26 - 4} = \sqrt{4 \cdot 25} = 10.$$

In fine, $AC = r + x = 5$, $BC = r + y = 12$, $AB = 13$.

Raspuns: 5 cm, 12 cm, 13 cm.

5. Inaltimea CD , dusa din varful unghiului drept C a triunghiului dreptunghic ABC , imparte acest triunghi in doua triunghiuri dreptunghice ADC si BDC . Razele cercurilor inscrise in aceste cercuri sunt egale cu r_1 si r_2 respectiv. Sa se afle raza r a cercului inscris in $\triangle ABC$.

Solutie



Fie triunghiul ABC din enunt cu notatiile traditionale.

Cum $\triangle ADC \sim \triangle ACB$ si coeficientul de asemanare este $k_1 = \frac{b}{c}$, rezulta $\frac{r_1}{r} = \frac{b}{c}$.

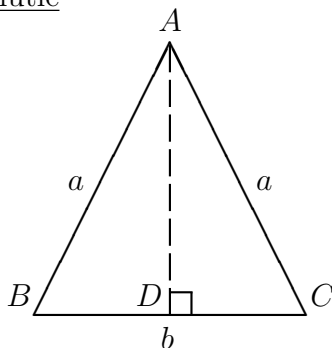
Analog $\triangle BDC \sim \triangle BCA$, $k_2 = \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{r_2}{r} = \frac{a}{c}$.

Ridicam la patrat aceste egalitati, le adunam membru cu membru, utilizam teorema lui Pitagora si obtinem:

$$\frac{r_1^2}{r^2} + \frac{r_2^2}{r^2} = \frac{b^2 + a^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = 1 \Leftrightarrow r = r_1^2 + r_2^2.$$

De aici, $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

6. Sa se determine laturile triunghiului isoscel, stiind ca raza cercului inscris in el este egala cu $\frac{3}{2}$ cm, iar raza cercului circumscris este egala cu $\frac{25}{8}$ cm.

Solutie

Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC = a$, $BC = b$. Fie AD este inaltimea relativa bazei. Din $\triangle ADC$ dreptunghic gasim $AD = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$, atunci

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}.$$

Din $r = \frac{A}{p}$ deducem $\frac{\frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}}{a + \frac{b}{2}} = \frac{3}{2}$, adica

$$b\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = 3\left(a + \frac{b}{2}\right) \Leftrightarrow b^2\left(a - \frac{b}{2}\right)\left(a + \frac{b}{2}\right) = 9\left(a + \frac{b}{2}\right)^2$$

sau

$$a + \frac{b}{2} = \frac{b^2\left(a - \frac{b}{2}\right)}{9}. \quad (*)$$

Din $\frac{abc}{4A} = R$ deducem

$$\frac{a^2b}{2b\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}} = \frac{25}{8}$$

sau

$$25\sqrt{\left(a - \frac{b}{2}\right)\left(a + \frac{b}{2}\right)} = 4a^2. \quad (**)$$

Rezolvam sistemul, format din ecuatiile (*) si (**). Substituim $a + \frac{b}{2}$ din (*) in (**) si obtinem ecuatiya omogena $24a^2 - 50ab + 25b^2 = 0$. Impartim ecuatiya la $b^2 \neq 0$ si obtinem ecuatiya $24\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 50\frac{a}{b} + 25 = 0$. De aici

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{5}{6}, \\ \frac{a}{b} = \frac{5}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{6}b, \\ a = \frac{5}{4}b. \end{cases}$$

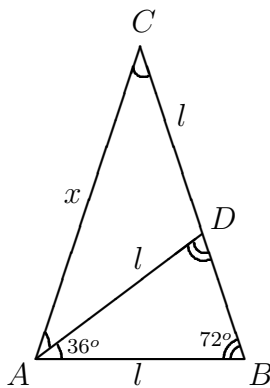
Cercetam doua cazuri:

- 1) Daca $a = \frac{5}{6}b$, atunci din ecuatia (*) obtinem: $b = 6$ si $a = 5$.
- 2) Daca $a = \frac{5}{4}b$, atunci din ecuatia (*) obtinem: $b = \sqrt{21}$ si $a = \frac{5\sqrt{21}}{4}$.

Raspuns: exista doua triunghiuri isoscele ce verifica conditiile problemei: 1) 5 cm, 5 cm, 6 cm; 2) $\frac{5\sqrt{21}}{4}$ cm, $\frac{5\sqrt{21}}{4}$ cm, $\sqrt{21}$ cm.

7. Intr-un triunghi isoscel unghiul de la baza are masura de 72° , iar bisectoarea acestui unghi este egala cu l . Sa se determine laturile triunghiului.

Solutie



Fie ABC triunghiul dat, $AC = CB$, $m(\angle A) = m(\angle B) = 72^\circ$, AD este bisectoare si $AD = l$. Notam $AC = x$, atunci $BD = CB - CD = x - l$.

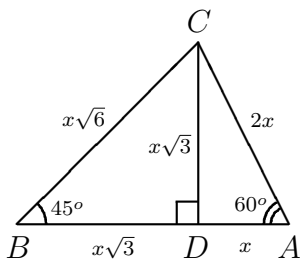
$\triangle ACB \sim \triangle BAD$. De aici, $\frac{AC}{BA} = \frac{AB}{BD} = \frac{CB}{AD}$ sau $\frac{x}{l} = \frac{l}{x-l} = \frac{x}{l}$. Prin urmare, din prima proportie, obtinem:

$$x(x-l) = l^2 \Leftrightarrow x^2 - lx - l^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{l-l\sqrt{5}}{2} < 0, \\ x = \frac{l+l\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Cum latura triunghiului are lungimea pozitiva, rezulta $AC = x = \frac{l(1+\sqrt{5})}{2} = CB$, $AB = l$.

8. Sa se determine laturile unui triunghi care are un unghi de 60° , un altul de 45° si perimetrul egal cu $(2 + \sqrt{2} + \sqrt{6})$ cm.

Solutie



Fie ABC triunghiul dat, având $m(\angle B) = 45^\circ$, $m(\angle A) = 60^\circ$ și $AB + BC + AC = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}$. Notăm prin D proiecția vârfului C pe latura AB și prin x – lungimea segmentului AD .

Triunghiul dreptunghic ADC are un unghi ascuțit de 30° , prin urmare, ipotenuza lui, AC , este egală cu dublul catetei AD : $AC = 2x$. Tot de aici, conform teoremei lui Pitagora, $CD = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3}$.

Pe de altă parte, triunghiul dreptunghic CDB este isoscel, prin urmare, $BD = CD = x\sqrt{3}$, $BC = x\sqrt{6}$. Rezulta

$$AB + BC + AC = (x\sqrt{3} + x) + x\sqrt{6} + 2x = x(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}) = x\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2}).$$

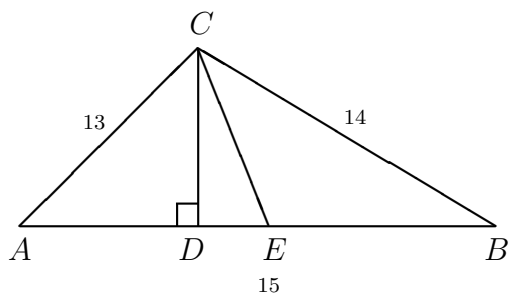
Deci, $x\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}$ și avem:

$$x = \frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Obținem ca laturile $\triangle ABC$ sunt: $BC = 2$ cm, $AC = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm, $AB = \left(\frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2}\right)$ cm.

9. Laturile unui triunghi au lungimile 13, 14 și 15 cm. Înălțimea și mediana duse la latura mai mare îl împart în trei triunghiuri. Să se calculeze ariile acestor triunghiuri.

Soluție



Fie în triunghiul ABC $AB = 15$ cm, $AC = 13$ cm, $BC = 14$ cm, CD înălțimea, iar CE – mediana duse din vârful C .

Calculăm aria $\triangle ABC$, utilizând formula lui Heron:

$$A_{\triangle ABC} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84.$$

Cum CE este mediana, obținem $A_{\triangle BCE} = A_{\triangle ACE} = \frac{A_{\triangle ABC}}{2} = 42$.

Calculăm înălțimea CD :

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = 84,$$

de aici $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot CD = 84$ rezulta $CD = \frac{56}{5}$.

Gasim lungimea catetei AD a triunghiului dreptunghic ADC :

$$AD = \sqrt{13^2 - \left(\frac{56}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(13 - \frac{56}{5}\right) \left(13 + \frac{56}{5}\right)} = \sqrt{\frac{9}{5} \cdot \frac{121}{5}} = \frac{33}{5}.$$

$$\text{Calculam } A_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{33}{5} \cdot \frac{56}{5} = \frac{924}{25}.$$

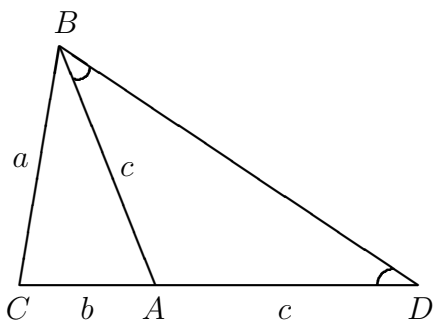
In fine,

$$A_{\triangle CDE} = A_{\triangle ACE} - A_{\triangle ADC} = 42 - \frac{924}{25} = \frac{1050 - 924}{25} = \frac{126}{25}.$$

$$\text{Raspuns: } 42 \text{ cm}^2, \frac{924}{25} \text{ cm}^2, \frac{126}{25} \text{ cm}^2.$$

10. In triunghiul ABC cu $AB = c$, $AC = b$ si $BC = a$ are loc egalitatea $a^2 = b(b+c)$. Sa se demonstreze ca $m(\angle A) = 2m(\angle B)$.

Solutie



Fie $\triangle ABC$ poseda proprietatea din enunt. Egalitatea $a^2 = b(b+c)$ poate fi scrisa sub forma

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a}.$$

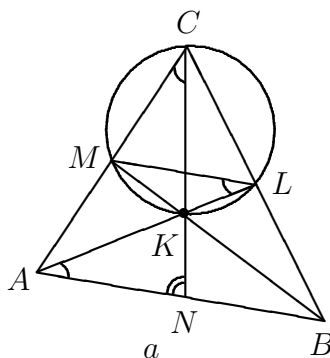
Pe semidreapta CA depunem segmentul $AD = c$ astfel incat A este intre C si D . Consideram triunghiul isoscel BAD . El are $\angle ABD \equiv \angle ADB$. Cum $\angle CAB$ este unghi exterior al $\triangle BAD$ rezulta

$$m(\angle CAB) = 2m(\angle ABD) \quad (*).$$

Cercetam $\triangle BCA$ si $\triangle DCB$. Ele au unghiul C comun si $\frac{BC}{DC} = \frac{CA}{CB}$. Prin urmare, $\triangle BCA \sim \triangle DCB$ (criteriul 2) si rezulta $\angle ABC \equiv \angle BDC \equiv \angle ABD$. De aici si din (*) obtinem $m(\angle A) = 2m(\angle ABC)$ c. t. d.

11. Medianele AL si BM ale triunghiului ABC se intersecteaza in punctul K . Varful C al triunghiului este situat pe cercul ce trece prin punctele K, L, M . Sa se calculeze lungimea medianei CN , daca $AB = a$.

Solutie



Fie triunghiul ABC verifica conditiile problemei. Deoarece ML este linie mijlocie in $\triangle ABC$, $ML \parallel AB$ si $\angle MLA \equiv \angle LAB$. Dar $\angle MLA \equiv \angle MCK$ fiind unghiuri inscrise in cerc care se sprigina pe aceeasi coarda MK .

Prin urmare, $\triangle ACN \sim \triangle KAN$ (criteriul 1). De aici $\frac{AN}{KN} = \frac{CN}{AN}$, ceea ce conduce la egalitatea:

$$KN \cdot CN = AN^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2. \quad (*)$$

Deoarece K este punctul de intersectie al medianelor $\triangle ABC$ avem $KN = \frac{1}{3}CN$. Substituind in (*), obtinem:

$$\frac{1}{3}CN^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Raspuns: $CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.