Ecuatii irationale

Ecuatia ce contine necunoscuta sub semnul radicalului se numeste **ecuatie irationala**. Drept exemplu de ecuatii irationale pot servi

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{3x-17}=1, \qquad \sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-2=0,$$

$$\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2+2}=\sqrt{3-2x}, \qquad \sqrt{x^2-3x+4}=2.$$

Mentionam, ca radacinile radicalului de ordin par ce figureaza in ecuatiile irationale se considera **aritmetice**, astfel valoarea radicalului de ordin par poate fi doar nenegativa si radicalul de ordin par exista daca si numai daca expresia de sub radical este nenegativa.

Exemplul 1. Sa se rezolve ecuatiile

$$a)\ \sqrt{x^2-6x+7}=-1, \qquad d)\ \sqrt{\frac{4-x}{x}}+\sqrt{\frac{x-4}{x+1}}=2-\sqrt{x^2-12},$$

$$b)\ \sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}=0, \qquad e)\ \sqrt{x-2}+\sqrt{x+7}=1+\sqrt{4-x},$$

$$c)\ \sqrt{3-x}+\sqrt{x-5}=3, \qquad f)\ (4x^2-9)\sqrt{x-1}=0.$$

Rezolvare. a) Se observa ca membrul din dreapta ecuatiei este negativ, pe cind cel din stinga, fiind un radical de ordinul doi, poate primi doar valori nenegative. Asadar ecuatia nu are solutii.

b) Cum suma a doua expresii, valorile carora sunt numere negative, este egal cu zero, rezulta ca ambele expresii concomitent sunt egale cu zero. Asadar, ecuatia este echivalenta cu sistemul de ecuatii

$$\begin{cases} x-2=0, \\ x+2=0, \end{cases}$$

care este incompatibil. Prin urmare, ecuatia nu are solutii.

c) Domeniul valorilor admisibile (concis DVA) al ecuatiei se determina din sistemul (expresiile ce se contin sub semnul radicalului de ordinul doi urmeaza a fi nenegative)

$$\begin{cases} 3-x\geq 0, \\ x-5\geq 0. \end{cases}$$

Evident sistemul nu are solutii, si, prin urmare, ecuatia enuntata la fel nu are solutie.

d) DVA al ecuatiei $x=4$ se determina rezolvind sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{4-x}{x}\geq 0, \\ \dfrac{x-4}{x+1}\geq 0, \\ x^2-12\geq 0. \end{cases}$$

Cum $x=4$ este unica valoare admisibila a ecuatiei, ramine de verificat, daca ea este sau ba solutie a ecuatiei. Introducind in ecuatie $x=4$ se obtine egalitatea numerica justa $0=0$ si, prin urmare, $x=4$ este unica solutie a ecuatiei date.

e) DVA al ecuatiei $x \in [2; 4]$ se determina din sistemul de inecuatii

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ x + 7 \geq 0, \\ 4 - x \geq 0. \end{cases}$$

Se observa ca in DVA are loc inegalitatea $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+7} \geq 3$, si cum $1 + \sqrt{4-x} \leq 1 + \sqrt{2} < 3$, rezulta ca ecuatia initiala nu are solutii.

f) Ecuatia se rezolva astfel

$$(4x^2 - 9)\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 4x^2 - 9 = 0, \\ \sqrt{x-1} = 0, \end{array} \right. \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2}, \\ x = \dfrac{3}{2}, \\ x = 1, \end{array} \right. \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2}, \\ x = 1. \end{array} \right.$$

Una din metodele standarde de rezolvare a ecuatiilor irationale consta in rationalizarea ei , adica in eliberarea succesiva de radicali pe calea ridicarii la o anumita putere a ambelor parti ale ecuatiei. Tinem sa mentionam (a se vedea [1]), ca daca n este un numar natural impar, ecuatiile $f(x) = g(x)$ si $\big(f(x)\big)^n = \big(g(x)\big)^n$ sunt echivalente, iar daca n este un numar natural par, ecuatia $\big(f(x)\big)^n = \big(g(x)\big)^n$ este o consecinta a ecuatiei $f(x) = g(x)$ (adica la ridicarea la putere para pot apare solutii straine), si, prin urmare, este necesara verificarea solutiilor obtinute.

Exemplul 2. Sa se rezolve ecuatiile

$$a)\ \sqrt[3]{5x+27} = x + 3, \qquad c)\ \sqrt{x^2 - 9x + 25} = 2x - 13,$$

$$b)\ \sqrt[3]{x} = \sqrt{x-4}, \qquad d)\ \sqrt{3-x} + \sqrt{6+x} = 3.$$

Rezolvare. a) Ambii membri ai ecuatiei se ridica la puterea a treia si se obtine ecuatia echivalenta

$$5x + 27 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27,$$

sau

$$x^3 + 9x^2 + 22x = 0,$$

de unde rezulta totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x^2 + 9x + 21 = 0. \end{array} \right.$$

Cum ultima ecuatie nu are solutii ($\Delta = 9^2 - 4 \cdot 21 < 0$), rezulta ca $x = 0$ este unica solutie a ecuatiei initiale.

b) Se ridica ambii membri ai ecuatiei la puterea a sasea (cel mai mic multiplu comun al ordinelor radicalilor (2 si 3) din ecuatie) si se obtine

$$x^2 = (x-4)^3$$

sau

$$x^3 - 13x^2 + 48x - 64 = 0,$$

de unde, grupand convenabil,

$$(x^3 - 8x^2) - (5x^2 - 40x) + (8x - 64) = 0,$$

se obtine

$$x^2(x - 8) - 5x(x - 8) + 8(x - 8) = 0,$$

sau

$$(x - 8)(x^2 - 5x + 8) = 0.$$

Astfel se obtine totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} x - 8 = 0, \\ x^2 - 5x + 8 = 0, \end{array}\right.$$

cu solutia $x = 8$. Introducand $x = 8$ in ecuatia din enunt se obtine egalitatea numerica justa 2=2 si, prin urmare, $x = 8$ este solutie a ecuatiei enuntate.

c) Se ridica la patrat si se obtine ecuatia patrata

$$x^2 - 9x + 25 = 4x^2 - 52x + 169,$$

sau

$$3x^2 - 43x + 144 = 0,$$

cu solutiile $x_1 = 9$ si $x_2 = \dfrac{16}{3}$. Se efectueaza verificarea si ramane $x = 9$.

d) Se izoleaza un radical

$$\sqrt{6 + x} = 3 - \sqrt{3 - x},$$

si se ridica la patrat

$$6 + x = 9 - 6\sqrt{3 - x} + 3 - x,$$

iar se izoleaza un radical

$$6\sqrt{3 - x} = 6 - 2x,$$

sau

$$3\sqrt{3 - x} = 3 - x,$$

si ridicand iar la patrat se obtine ecuatia

$$9(3 - x) = (3 - x)^2,$$

cu solutiile $x = 3$ si $x = -6$. Prin verificare se constata ca atat $x = 3$ cat si $x = -6$ verifica ecuatia initiala.

Adesea este comoda si utila afirmatia (a se vedea [2]):

A1. Ecuatia $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$ este echivalenta cu sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = \left[g(x)\right]^{2n}, \\ g(x) \geq 0. \end{array}\right.$$

Tinem sa mentionam ca conditia $f(x) \geq 0$ este in aceasta situatie in plus, deoarece acei x_0 ce verifica ecuatia in conditiile sistemului verifica, si restrictia $f(x_0) \geq 0$.

Nota. Din afirmatia **A1** rezulta ca ecuatiile $\sqrt[2n]{f(x)} = b$ $(b \geq 0)$ si $f(x) = [b]^{2n}$ sunt echivalente.

Exemplul 3. Sa se rezolve ecuatiile

$$a)\ \sqrt{x^2 - 9x + 25} = 2x - 13, \qquad b)\ \sqrt{10 - x} = x + 2.$$

Rezolvare. a) Se utilizeaza afirmatia **A1** (a se compara rezolvarea cu cea din exemplul 2d)) si se obtine sistemul

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 25 = (2x - 13)^2, \\ 2x - 13 \geq 0, \end{cases}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} 3x^2 - 43x + 144 = 0, \\ x \geq \dfrac{13}{2}, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{16}{3}, \\ x_2 = 9, \end{array} \right. \\ x \geq \dfrac{13}{2}, \end{cases}$$

de unde $x = 9$.

b) Se utilizeaza afirmatia **A1** si se obtine

$$\sqrt{10 - x} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - x = (x + 2)^2, \\ x + 2 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 6 = 0, \\ x \geq -2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -6, \\ x_2 = 1, \end{array} \right. \\ x \geq -2, \end{cases} \Leftrightarrow\ x = 1.$$

Mentionam ca in procesul rezolvarii unei ecuatii irationale cu ajutorul DVA se tine seama de DVA pe tot parcursul rezolvarii ecuatiei.

Exemplul 4. Sa se rezolve ecuatiile

$$a)\ \sqrt{3x - 5} - \sqrt{4 - x} = 1, \qquad c)\ \sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 8} = \sqrt{x^2 - 5x + 6},$$

$$b)\ \sqrt{\frac{20 + x}{x}} + \sqrt{\frac{20 - x}{x}} = \sqrt{6}, \qquad d)\ \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 2} = \sqrt{11 - x}.$$

Rezolvare. a) DVA al ecuatiei este $x \in \left[\frac{5}{3}; 4\right]$. Ecuatia initiala este echivalenta cu ecuatia

$$\sqrt{3x - 5} = 1 + \sqrt{4 - x}$$

Cum ambii membri ai acestei ecuatii in DVA sunt nenegativi, ridicind la patrat se obtine ecuatia echivalenta

$$3x - 5 = 1 + 2\sqrt{4 - x} + 4 - x,$$

sau

$$2x-5=\sqrt{4-x}.$$

Utilizind afirmatia **A1** si tinind seama de *DVA* se obtine

$$2x-5=\sqrt{4-x}\ \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-5)^2=4-x, \\ x\geq \dfrac{5}{2}, \\ x\in[\frac{5}{3};4], \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-19x+21=0, \\ x\in[\frac{5}{2};4], \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{7}{4}, \\ x_2=3, \end{array}\right. \\ x\in[\frac{5}{2};4], \end{cases} \Leftrightarrow\ x=3.$$

b) *DVA* al ecuatiei este $x\in(0;20]$. Cum ambii membri sunt nenegativi, ridicand la patrat obtinem ecuatia echivalenta

$$\frac{20+x}{x}+2\sqrt{\frac{20+x}{x}}\sqrt{\frac{20-x}{x}}+\frac{20-x}{x}=6$$

sau, tinand seama ca $x\in(0;20]$, si prin urmare $2\sqrt{\dfrac{20+x}{x}}\sqrt{\dfrac{20-x}{x}}=2\dfrac{\sqrt{20+x}\sqrt{20-x}}{x}$, se obtine ecuatia

$$20+x+2\sqrt{20+x}\sqrt{20-x}+20-x=6x,$$

de unde

$$\sqrt{20+x}\sqrt{20-x}=3x-20.$$

Ultima ecuatie in *DVA* este echivalenta cu sistemul

$$\begin{cases} (20+x)(20-x)=(3x-20)^2, \\ 3x-20\geq 0, \\ x\in(0;20] \end{cases}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} 10x^2-120x=0, \\ x\in\left[\frac{20}{3};20\right] \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=12, \end{array}\right. \\ x\in\left[\frac{20}{3};20\right] \end{cases}$$

de unde $x=12$.

c) *DVA* al ecuatiei $x\in(-\infty;-4]\cup\{2\}\cup[3,+\infty)$ se obtine rezolvand sistemul de ecuatii

$$\begin{cases} x^2-x-2\geq 0, \\ x^2+2x-8\geq 0, \\ x^2-5x+6\geq 0. \end{cases}$$

Se tine seama, ca daca $AB \geq 0$, atunci $\sqrt{AB} = \sqrt{|A|} \cdot \sqrt{|B|}$ si se obtine

$$\sqrt{|x-2|}\sqrt{|x+1|} + \sqrt{|x-2|}\sqrt{|x+4|} = \sqrt{|x-3|}\sqrt{|x-2|}$$

sau

$$\sqrt{|x-2|} \cdot \left[\sqrt{|x+1|} + \sqrt{|x+4|} - \sqrt{|x-3|}\right] = 0,$$

de unde

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{|x-2|} = 0, \\ \sqrt{|x+1|} + \sqrt{|x+4|} = \sqrt{|x-3|}. \end{array}\right.$$

Din prima ecuatie a totalitatii rezulta $x = 2$.

La rezolvarea ecuatiei ramase, se tine seama de DVA si se considera urmatoarele doua cazuri:

I. daca $x \in (-\infty; -4]$, atunci ecuatia devine

$$\sqrt{-1-x} + \sqrt{-x-4} = \sqrt{3-x}.$$

Se ridica la patrat si se obtine ecuatia echivalenta

$$-1 - x + 2\sqrt{-1-x}\sqrt{-x-4} - x - 4 = 3 - x$$

sau

$$2\sqrt{-1-x}\sqrt{-x-4} = 8 + x.$$

Se utilizeaza afirmatia **A1** si se obtine

$$\begin{cases} 4(1+x)(x+4) = (6+x)^2, \\ x \geq -8 \end{cases}$$

sau, dupa transformari elementare

$$\begin{cases} 3x^2 + 8x - 20 = 0, \\ x \geq -8. \end{cases}$$

Se tine seama ca $x \in [-8; -4]$ si se obtine solutia

$$x = -\frac{-2 - 2\sqrt{37}}{3}.$$

II. daca $x \in [3; +\infty)$ se obtine ecuatia

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{x-3}$$

Cum $x + 4 > x - 3$, avem $\sqrt{x+4} > \sqrt{x-3}$ si tinind seama ca $\sqrt{x-1} \geq 2$, rezulta ca ecuatia data nu are solutii pentru $x \geq 3$.

Asadar solutiile ecuatiei din enunt sunt $x = 2$ si $x = -\dfrac{-2-2\sqrt{37}}{3}$.

d) DVA al ecuatiei $x \in [1; 11]$ se determina rezolvand sistemul (conditiile de existenta a radicalilor de ordin par)

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x + 2 \geq 0, \\ 11 - x \geq 0. \end{cases}$$

Ambii membri ai ecuatiei sunt nenegativi si ridicand la patrat se obtine ecuatia echivalenta

$$2\sqrt{x-1}\sqrt{x+2} = 10 - 3x,$$

care la randul sau este echivalenta cu sistemul (a se vedea afirmatia **A1**)

$$\begin{cases} 4(x-1)(x+2) = (10-3x)^2, \\ 10 - 3x \geq 0, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} 5x^2 - 64x + 108 = 0, \\ x \leq \dfrac{10}{3}, \end{cases}$$

cu solutia $x_1 = 2$, ce verifica si DVA initial.

Ecuatiile de tipul

$$(F\left(\sqrt[n]{f(x)}\right) = 0$$

prin intermediul substitutiei $\sqrt[n]{f(x)} = t$, se reduc de regula, la ecuatii algebrice.

Exemplul 5. Sa se rezolve ecuatiile

$a)$ $2\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x} = 18,$

$c)$ $1 + \dfrac{15}{\sqrt{2x+1}} = 2\sqrt{2x+1},$

$b)$ $\sqrt[3]{\dfrac{x+4}{5x+7}} + \sqrt[3]{\dfrac{5x+7}{x+4}} = \dfrac{13}{6},$

$d)$ $x^2 + 5x + 4 = 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}.$

Rezolvare. a) Se noteaza $\sqrt[6]{x} = t$ $(t \geq 0)$, atunci $\sqrt[3]{x} = t^2$ si ecuatia devine

$$2t^2 + 5t - 18 = 0.$$

Rezolvand aceasta ecuatie patratica, se obtine $t_1 = -\dfrac{9}{2}$ si $t_2 = 2$. Cum $t \geq 0$ ramane $t = 2$ sau $\sqrt[6]{x} = 2$ cu $x = 2^6$ sau $x = 64$.

b) DVA al ecuatiei este $\mathbf{R} \setminus \{-4; -\frac{7}{5}\}$. Se observa ca in ecuatie figureaza expresii reciproc inverse. Se noteaza $\sqrt[3]{\dfrac{x+4}{5x+7}} = t$, atunci $\sqrt[3]{\dfrac{5x+7}{x+4}} = \dfrac{1}{t}$ si ecuatia devine

$$t + \frac{1}{t} = \frac{13}{6},$$

sau, dupa transformari elementare in DVA,

$$6t^2 - 13t + 6 = 0.$$

Se rezolva ecuatia patratica si se obtine $t_1 = \dfrac{2}{3}$ si $t_2 = \dfrac{3}{2}$. Asadar

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{\dfrac{x+4}{5x+7}} = \dfrac{2}{3}, \\ \sqrt[3]{\dfrac{x+4}{5x+7}} = \dfrac{3}{2}, \end{array}\right.$$

sau, ridicand la puterea a treia

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x+4}{5x+7}=\dfrac{8}{27},\\ \dfrac{x+4}{5x+7}=\dfrac{27}{8},\end{array}\right.$$

de unde

$$\left[\begin{array}{l}x=4,\\ x=-\dfrac{157}{127}.\end{array}\right.$$

c) Se noteaza $\sqrt{2x+1}=t,\ t>0$ si ecuatia devine

$$t+\frac{15}{t}=2t$$

sau

$$2t^2-t-15=0,$$

de unde $t_1=-\dfrac{5}{2}$ (nu verifica conditia $t>0$) si $t=3$. Asadar

$$\sqrt{2x+1}=3$$

de unde tinand seama de nota la afirmatia **A1** se obtine $2x+1=9$ si $x=4$.

d) Se noteaza $\sqrt{x^2+5x+28}=t,\ t\geq 0$, atunci $x^2+5x+28=t^2$ sau $x^2+5x=t^2-28$ si ecuatia devine

$$t^2-28+4=5t$$

sau

$$t^2-5t-24=0$$

cu solutiile $t_1=-3$ si $t_2=8$.

Cum $t\geq 0$ ramine $t=8$ sau

$$\sqrt{x^2+5x+28}=8.$$

Se ridica la patrat si se obtine ecuatia echivalenta

$$x^2+5x+28=64,$$

sau

$$x^2+5x-36=0$$

cu solutiile $x=-9$ si $x=4$.

In unele cazuri ecuatia irationala se rationalizeaza, prin multiplicarea ambilor membri ai ecuatiei cu o expresie, ce nu primeste valoarea zero.

Exemplul 6. Sa se rezolve ecuatia

$$\sqrt{3x^2-x+6}-\sqrt{3x^2-x-1}=1$$

Rezolvare. Se multiplica ambii membri ai ecuatiei cu expresia

$$\sqrt{3x^2-x+6}+\sqrt{3x^2-x-1}\neq 0,$$

(conjugata expresie din ecuatie) si, dupa reducerea termenilor asemenea, se obtine ecuatia

$$7=\sqrt{3x^2-x+6}+\sqrt{3x^2-x-1}$$

echivalenta cu cea enuntata, deoarece ecuatia

$$\sqrt{3x^2-x+6}+\sqrt{3x^2-x-1}=0$$

nu are solutii reale.

Adunand membru cu membru ecuatiile

$$\sqrt{3x^2-x+6}-\sqrt{3x^2-x-1}=1,$$

$$\sqrt{3x^2-x+6}+\sqrt{3x^2-x-1}=7,$$

se obtine ecuatia

$$2\sqrt{3x^2-x+6}=8,$$

sau

$$\sqrt{3x^2-x+6}=4.$$

Se ridica la patrat si se obtine ecuatia echivalenta (a se vedea nota la afirmatia **A1**)

$$3x^2-x-10=0$$

cu solutiile $x_1=-\dfrac{5}{3}$ si $x_2=2$.

Se efectueaza verificarea si se obtine ca atat $x=-\dfrac{5}{3}$ cat si $x=2$ sunt solutii ale ecuatiei enuntate.

Nota. Ecuatia data poate fi rezolvata si utilizind substitutia $t=3x^2-x+6$, atunci $3x^2-x-1=3x^2-x+6-7=t-7$ si ecuatia devine

$$\sqrt{t}-\sqrt{t-7}=1$$

si se rezolva similar exemplului 2d).

Ecuatiile ce urmeaza se rezolva prin metoda evidentierii unui patrat complet sub semnul radicalului.

Exemplul 7. Sa se rezolve ecuatiile

$$a)\ \sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+6x+9}=5,$$

$$b)\ \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=x-1.$$

Rezolvare. a) Se observa ca $x^2-4x+4=(x-2)^2,\quad x^2+6x+9=(x+3)^2$, se tine seama ca $\sqrt{A^2}=|A|$ si se obtine ecuatia

$$|x-2|+|x+3|=5.$$

Cum $|x-2|=|2-x|,\quad (2-x)+(x+3)=5$ si astfel

$$|2-x|+|x+3|=|(2-x)+(x+3)|$$

utilizind proprietatile modulului (a se vedea [1]) se obtine

$$(2-x)(x+3) \geq 0,$$

de unde multimea solutiilor ecuatiei date este

$$x \in [-3; 2].$$

b) Se evidentiaza sub fiecare radical un patrat perfect

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1-2\cdot 2\sqrt{x-1}+4} = \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} = |\sqrt{x-1}-2|,$$

$$\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1-2\cdot 3\sqrt{x-1}+9} = \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = |\sqrt{x-1}-3|.$$

Se noteaza $\sqrt{x-1} = t$, $t \geq 0$ si ecuatia devine

$$|t-2| + t - 3| = t^2$$

echivalenta cu totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 \leq t \leq 2, \\ -t+2-t+3 = t^2, \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < t \leq 3, \\ t-2-t+3 = t^2, \end{cases} \\ \begin{cases} t > 3, \\ t-2+t-3 = t^2, \end{cases} \end{array}\right.$$

sau

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 \leq t \leq 2, \\ t = -1 \pm \sqrt{6}, \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < t \leq 3, \\ t = \pm 1, \end{cases} \\ \begin{cases} t > 3, \\ t \in \emptyset, \end{cases} \end{array}\right.$$

de unde $t = \sqrt{6}-1$. Asadar $\sqrt{(x-1)} = \sqrt{6}-1$ sau $x = 8-2\sqrt{6}$.

In continuare se prezinta unele metode speciale de rezolvare a ecuatiilor irationale.

Exemplul 8. Sa se rezolve ecuatiile

$$a)\ \sqrt{2x+5}+\sqrt{3x-5}=4,$$

$$b)\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3x-2}=\sqrt[3]{x-2},$$

$$c)\ \frac{(4-x)\sqrt{4-x}+(x-2)\sqrt{x-2}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{x-2}}=2,$$

$$d)\ \sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}+2\sqrt{(x-2)(x+2)}=6-2x,$$

$$e)\ \sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6,$$

$$f)\ \sqrt[4]{x+7}-\sqrt[4]{x-9}=2,$$

$$g)\ \frac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x,$$

$$h)\ 3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}=\frac{120}{x},$$

$$i)\ \sqrt{x(x+1)}=\sqrt{x+3}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.$$

Rezolvare. a) Se verifica usor ca $x=2$ este solutie a ecuatiei date. Alte solutii ecuatia nu are, deoarece membrul din stinga ca suma a doua functii strict crescatoare in $[\frac{5}{3};+\infty]$, este o functie strict crescatoare, iar membrul din dreapta este o constanta, si, prin urmare, graficele acestor functii pot avea cel mult un punct de intersectie. Asadar $x=2$ este unica solutie a ecuatiei.

b) Se ridica ambii membri ai ecuatiei la cub, utilizand formula $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$$x+3x-2+3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{3x-2}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3x-2})=x-2 \tag{1}$$

sau, tinand seama ca $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3x-2}=\sqrt[3]{x-2}$ (ecuatia enuntata),

$$\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{3x-2}\sqrt[3]{x-2}=x. \tag{2}$$

Se ridica iar la cub si se obtine

$$x(3x-2)(x-2)=-x^3$$

sau

$$x\left[(3x-2)(x-2)+x^2\right]=0,$$

de unde rezulta totalitatea de ecuatii

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x^2-2x+1=0, \end{array}\right.$$

sau

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Se efectueaza verificarea (este necesara deoarece ecuatiile (1) si (2) in general nu sunt echivalente) si se obtine unica solutie a ecuatiei enuntate $x = 0$.

c) DVA al ecuatiei este $x \in [2; 4]$. Se noteaza $\sqrt{4-x} = u$, $\sqrt{x-2} = v$, atunci

$$\begin{cases} u + x = u^2, \\ x - 2 = v^2, \end{cases}$$

de unde $u^2 + v^2 = 2$.

In u si v ecuatia devine

$$\frac{u^3 + v^3}{u + v} = 2$$

sau

$$\frac{(u+v)(u^2 - uv + v^2)}{u + v} = 2$$

si cum $u + v \neq 0$, rezulta

$$u^2 - uv + v^2 = 2.$$

Rezolvand sistemul

$$\begin{cases} u^2 - uv + v^2 = 2, \\ u^2 + v^2 = 2, \end{cases}$$

se obtine

$$\begin{cases} uv = 0, \\ u^2 + v^2 = 2, \end{cases}$$

Deoarece $u \geq 0,\ v \geq 0$, ramane $u_1 = 0$, $v_1 = \sqrt{2}$ si $u_2 = \sqrt{2}$, $v_2 = 0$ de unde rezulta $x_1 = 2$ si $x_2 = 4$.

d) DVA al ecuatiei este $x \in [2; 3]$.

Se utilizeaza substitutia $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} = t,\ t > 0$. Atunci $t^2 = x - 2 + x + 2 + 2\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}$ sau $2\sqrt{x-2}\sqrt{x+2} = t^2 - 2x$ si ecuatia devine

$$t + t^2 = 6$$

de unde $t_1 = -3$ (nu verifica conditia $t > 0$) si $t = 2$. Asadar

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} = 2.$$

Se rezolva similar exemplului 8a) si se obtine $x = 2$.

e) DVA al ecuatiei este $x \in [1; 3]$. Partea dreapta a ecuatiei se scrie $x^2 - 4x + 6 = x^2 - 4x + {}+4 + 2 = (x-2)^2 + 2$ si in DVA primeste valoarea minima 2 pentru $x = 2$, iar partea din stanga ecuatiei obtine valoarea maxima 2 pentru $x = 2$ (se arata, de exemplu, cu ajutorul calculului diferential). Asadar, unica solutie a ecuatiei este $x = 2$.

f) Se noteaza $\sqrt[4]{x+7} = u$, $\sqrt[4]{x-9} = v,\ u \geq 0,\ v \geq 0$ si tinand seama de ecuatia din enunt, se obtine sistemul

$$\begin{cases} u^4 - v^4 = 16, \\ u - v = 2, \end{cases}$$

care se rezolva in felul urmator: din a doua ecuatie a sistemului rezulta $u = 2 + v$, se inlocuieste in prima si se obtine ecuatia in v

$$(2+v)^4 - v^4 = 16,$$

sau

$$16 + 32v + 24v^2 + 8v^3 + v^4 - v^4 = 16,$$

de unde rezulta totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} v = 0, \\ v^2 + 3v + 4 = 0, \end{array}\right.$$

cu solutia $v = 0$. Atunci $u = 2$ si rezolvand sistemul

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x+7} = 2, \\ \sqrt[4]{x-9} = 0, \end{cases}$$

se obtine $x = 9$.

g) Se observa ca $x = 0$ nu verifica ecuatia data. Se impart ambii membri ai ecuatiei la x si se obtine ecuatia

$$\frac{x}{\sqrt{2x+15}} + \frac{\sqrt{2x+15}}{x} = 2.$$

Cum $a + \dfrac{1}{a} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$ (rezulta din inegalitatea dintre media aritmetica si media geometrica) avem

$$\frac{x}{\sqrt{2x+15}} = 1$$

de unde, utilizand afirmatia **A1** se obtine sistemul

$$\begin{cases} 2x + 15 = x^2, \\ x > 0, \end{cases}$$

cu solutia $x = 5$. Se efectueaza verificarea si se obtine ca $x = 5$ este solutia ecuatiei din enunt.

h) Cum membrul din stinga ecuatiei este pozitiv rezulta ca membrul din dreapta la fel este pozitiv, si astfel DVA al ecuatiei este $x \in [5; +\infty)$. In DVA membrul din stanga reprezinta o functie strict crescatoare, iar cel din dreapta o functie strict descrescatoare, prin urmare ecuatia poate avea cel mult o radacina. Verificand cea mai mica valoare posibila $x = 5$ se convinge ca ambii membri primesc aceeasi valoare. Asadar $x = 5$ este unica solutie a ecuatiei

i) DVA al ecuatiei $x \in [-3; -1] \cup (0; = \infty)$.

Ecuatia se scrie

$$\sqrt{x(x+1)} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{x+3}$$

se ridica la patrat si se obtine ecuatia echivalenta

$$2\sqrt{x(x+1)}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 2 - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Cum $x^2 + \dfrac{1}{x^2} \geq 2$, iar $\sqrt{x(x+1)}\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} \geq 0$, rezulta sistemul

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2, \\ \left[\begin{array}{l} x(x+1) = 0, \\ 1 + \dfrac{1}{x^2} = 0, \end{array}\right. \end{cases}$$

cu solutiile $x = \pm 1$. Se efectueaza verificarea si ramane $x = -1$.

Exemple recapitulative

Sa se rezolve ecuatiile:

1. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=\sqrt{6x+1}$,

2. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{x+3}=\sqrt{3x+1}$,

3. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$,

4. $\sqrt{x^3-x^2+4}+\sqrt{x^3-x^2+1}=3$,

5. $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{4x^2-32x+64}=9$,

6. $x^2-2x+4-3\sqrt{2x^2-4x+5}=-1$,

7. $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$,

8. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$,

9. $\sqrt{3x-2}-\dfrac{x^2-2x+4}{\sqrt{3x-2}}=x-3$,

10. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-3}=3x-6+2\sqrt{2x^2-3x-9}$,

11. $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$,

12. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$,

13. $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$,

14. $\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}+3\sqrt{\dfrac{2+x}{3-x}}=4$,

15. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0$,

16. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$,

17. $\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4$,

18. $(4x^2-9)\sqrt{x+1}=0$,

19. $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}$,

20. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$.

Bibliografie

1. P. Cojuhari. Ecuatii si inecuatii. Teorie si practica. Chisinau, Universitas, 1993.

2. P. Cojuhari, A. Corlat. Ecuatii si inecuatii algebrice. Mica biblioteca a elevului. Seria matematica si informatica. Editura ASRM. Chisinau, 1995.