Ecuatii exponentiale

Ecuatia ce contine variabila necunoscuta la exponentul puterii se numeste **ecuatie exponentiala**.

Cea mai simpla ecuatie exponentiala este de forma

$$a^x = b, \tag{1}$$

unde $a > 0,\ a \neq 1$.

Afirmatia 1. Pentru $b \leq 0$ ecuatia (1) nu are solutii, iar pentru $b > 0$ ecuatia data are o solutie unica: $x = \log_a b$.

Exemplul 1. Sa se rezolve ecuatiile

$$a)\ 2^x = -4, \qquad b)\ 2^x = 4, \qquad c)\ 2^x = 5.$$

Rezolvare. a) Cum membrul din stanga ecuatiei este pozitiv pentru orice $x \in \mathbf{R}$ (a se vedea proprietatile functiei exponentiale), iar membrul din dreapta este negativ, ecuatia nu are solutii.

b) Utilizand afirmatia 1 se obtine $x = \log_2 4$, adica $x = 2$.

c) Similar exemplului precedent se obtine $x = \log_2 5$.

Nota. Din afirmatia 1 rezulta ca ecuatia exponentiala de tipul

$$a^{f(x)} = b, \tag{2}$$

unde $a > 0,\ a \neq 1$ si $b > 0$, este echivalenta cu ecuatia

$$f(x) = \log_a b$$

Exemplul 2. Sa se rezolve ecuatiile

$$a)\ 2^{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad b)\ 3^{|x^2-x|} = 9, \qquad c)\ (\sqrt{5})^{2+4+6+\ldots+2x} = 5^{45},\ x \in \mathbf{N}.$$

Rezolvare. a) Se tine seama de nota la afirmatia 1 si se obtine ecuatia trigonometrica

$$\sin x = \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Cum $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = \log_2 \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \log_2 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\log_2 2 = -\frac{1}{2}$, rezulta $\sin x = -\frac{1}{2}$, de unde $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6},\ n \in \mathbf{Z}$.

b) Cum $\log_3 9 = 2$, se obtine ecuatia

$$|x^2 - x| = 2.$$

Utilizand proprietatile modulului (a se vedea, de exemplu, [1]) se obtine

$$|x^2 - x| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x = 2, \\ x^2 - x = -2, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0, \\ x^2 - x + 2 = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

c) Logaritmand in baza 5 (ambii membri sunt pozitivi) se obtine

$$\frac{1}{2}(2+4+6+\ldots+2x)=45 \quad \text{sau} \quad 1+2+\ldots+x=45.$$

Utilizand formula pentru suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice se obtine

$$\frac{1+x}{2}x=45,$$

de unde rezulta ecuatia patrata

$$x^2+x-90=0$$

cu solutiile $x_1=-10$ si $x=9$. Cum $x\in\mathbf{N}$, ramane $x=9$.

La rezolvarea ecuatiilor exponentiale se utilizeaza urmatoarea afirmatie de baza referitoare la echivalenta ecuatiilor (a se vedea, de exemplu, [2]).

Afirmatia 2. Daca $a>0$ si $a\neq 1$, atunci ecuatiile

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \tag{3}$$

si

$$f(x)=g(x)$$

sunt echivalente.

Nota. Ecuatiile de tipul

$$a^{f(x)}=b^{g(x)} \qquad (a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$$

se pot scrie astfel

$$a^{f(x)}=a^{g(x)\log_a b}$$

si se rezolva utilizand afirmatia 2.

Unele ecuatii exponentiale se reduc la ecuatiile de tipul (1)-(3) cu ajutorul egalitatilor:

$$E1)\ a^x\cdot a^y=a^{x+y}, \quad E2)\ \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}, \quad E3)\ (a^x)^y=a^{x\cdot y}, \quad E4)\ \frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x, \quad E5)\ a^x\cdot b^x=(ab)^x.$$

Exemplul 3. Sa se rezolve ecuatiile

$$a)\ \frac{3^{2x+1}\cdot 9^{x+2}}{27^x}=243, \quad b)\ \frac{3^x}{2^x}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{3}{2}\right)^9, \quad c)\ 4^{3x+1}\cdot 625^{\frac{x}{2}}=6400, \quad d)\ 3^{2x-1}=7^{x+1}.$$

Rezolvare. a) Se utilizeaza egalitatile E1-E3, afirmatia 2 si se obtine

$$\frac{3^{2x+1}\cdot 9^{x+2}}{27^x}=243 \ \Leftrightarrow\ \frac{3^{2x+1}\cdot 3^{2(x+2)}}{3^{3x}}=3^5 \ \Leftrightarrow\ \frac{3^{2x+1+2(x+2)}}{3^{3x}}=3^5 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 3^{2x+1+2(x+2)-3x}=3^5 \ \Leftrightarrow\ 2x+1+2x+4-3x=5 \ \Leftrightarrow\ x=0.$$

b) Cum $\frac{a}{b}=\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$ $(ab\neq 0)$, rezulta $\left(\frac{4}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2(x^2-12)}$ si utilizand proprietatile E4, E3 si E1 se obtine

$$\frac{3^x}{2^x}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{3}{2}\right)^9 \ \Leftrightarrow\ \left(\frac{3}{2}\right)^x\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2(x^2-12)}=\left(\frac{3}{2}\right)^9 \ \Leftrightarrow\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x-2(x^2-12)}=\left(\frac{3}{2}\right)^9,$$

de unde, in baza afirmatiei 2, rezulta ecuatia patrata

$$2x^2 - x - 15 = 0$$

cu solutiile $x = 3$ si $x = -\dfrac{5}{2}$.

c) Cum $4^{3x+1} = 4^1 \cdot 4^{3x} = 4 \cdot (4^3)^x = 4 \cdot 64^x$, $625^{\frac{x}{2}} = (625^{\frac{1}{2}})^x = 25^x$ ecuatia devine

$$4 \cdot 64^x \cdot 25^x = 6400$$

sau

$$64^x \cdot 25^x = 1600.$$

Utilizand proprietatea E5 si afirmatia 2 se obtine $1600^x = 1600$, de unde $x = 1$.

d) Se tine seama de nota la afirmatia 2 si se obtine

$$3^{2x-1} = 3^{\log_3 7^{(x+1)}}$$

de unde rezulta ecuatia liniara

$$2x - 1 = x \log_3 7 + \log_3 7$$

sau

$$x(2 - \log_3 7) = \log_3 7 + 1$$

cu solutia $x = \dfrac{1 + \log_3 7}{2 - \log_3 7}$.

Daca ecuatia exponentiala este de tipul

$$F(a^{f(x)}) = 0, \tag{4}$$

atunci prin intermediul substitutiei $t = a^{f(x)}$, se obtine ecuatia

$$F(t) = 0,$$

care de regula se rezolva mai simplu. In cele mai frecvente cazuri se intalnesc ecuatiile de tipul

$$\begin{array}{c} A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} + C = 0, \\ A \cdot a^{f(x)} + C \cdot a^{-f(x)} + B = 0 \end{array} \tag{5}$$

($A,\ B$ si $C \in \mathbf{R}$), care cu ajutorul substitutiei $t = a^{f(x)}$ se reduc la ecuatia patrata

$$At^2 + Bt + C = 0.$$

Exemplul 4. Sa se rezolve ecuatiile:

$$a)\ 2^x + 3 \cdot 2^{x-4} = 76, \qquad b)\ 3^{-x} + 9 \cdot 3^x + 9^{x+1} + 9^{-x-1} = 8, \qquad c)\ 4^{x^2} - 2^{x^2} - 2 = 0,$$

$$d)\ 2^{1+x} - 2^{3-x} = 15, \qquad e)\ 4^{\sqrt{x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{x^2-2x}}.$$

Rezolvare. a) $2^x + 3 \cdot 2^{x-4} = 76 \iff 2^x + 3 \cdot \dfrac{2^x}{2^4} = 76$. Se noteaza $t = 2^x$, si se obtine ecuatia liniara

$$16t + 3t = 76 \cdot 16,$$

de unde $t = 64$. Asadar $2^x = 64$ si $x = 6$.

b) Ecuatia se scrie

$$\frac{1}{3^x} + 9 \cdot 3^x + 9 \cdot 9^x + \frac{1}{9 \cdot 9^x} = 8.$$

Se noteaza $t = 3^x$ (atunci $9^x = t^2$), si se obtine ecuatia algebrica

$$\frac{1}{t} + 9t + 9t^2 + \frac{1}{9t^2} = 8,$$

care se reduce (a se vedea [1]) prin substitutia

$$z = \frac{1}{t} + 9t$$

(atunci $9t^2 + \dfrac{1}{9t^2} = \dfrac{1}{9} \cdot \left(81t^2 + \dfrac{1}{t^2}\right) = \dfrac{1}{9}\left[\left(\dfrac{1}{t} + 9t\right)^2 - 18\right] = \dfrac{1}{9}z^2 - 2$) la ecuatia patrata

$$z + \frac{1}{9}z^2 - 2 = 8$$

sau

$$z^2 + 9z - 90 = 0,$$

de unde $z_1 = -15,\ z_2 = 6$. Cum $t > 0,\ z_1 = -15$ nu verifica ecuatia si ramane

$$\frac{1}{t} + 9t = 6,$$

de unde

$$9t^2 - 6t + 1 = 0$$

cu solutia $t = \dfrac{1}{3}$. Asadar $3^x = \dfrac{1}{3}$, de unde $x = -1$.

c) Se noteaza $t = 2^{x^2}$, atunci $4^{x^2} = (2^2)^{x^2} = \left(2^{x^2}\right)^2 = t^2$ si se obtine ecuatia patrata

$$t^2 - t - 2 = 0,$$

cu solutiile $t_1 = -1$ si $t_2 = 2$. Cum $t > 0$ (mai exact, deoarece $x^2 \geq 0,\ t = 2^{x^2} \geq 1$), ramane $t = 2$, adica

$$2^{x^2} = 2$$

de unde $x^2 = 1$ si deci $x = \pm 1$.

d) Cum $2^{1+x} = 2 \cdot 2^x,\ 2^{3-x} = \dfrac{2^3}{2^x}$, se noteaza $t = 2^x$ si ecuatia devine

$$2t - \frac{8}{t} = 15.$$

Se multiplica ambii membri ai ecuatiei cu t $(t > 0)$ si se obtine ecuatia patrata

$$2t^2 - 15t - 8 = 0$$

cu solutiile $t_1 = -\frac{1}{2}$ si $t_2 = 8$. Cum $t_1 < 0$, ramane

$$2^x = 8,$$

de unde $x = 3$.

e) Se noteaza $t = 2^{\sqrt{x^2-2x}}$ (cum $\sqrt{x^2-2x} \geq 0$ in $x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$, rezulta $t \geq 1$) si se obtine ecuatia

$$4t^2 - 9t + 2 = 0$$

cu solutiile $t_1 = \frac{1}{4}$ si $t_2 = 2$. Cum $t_1 < 1$ ramane de rezolvat ecuatia

$$2^{\sqrt{x^2-2x}} = 2,$$

echivalenta cu

$$\sqrt{x^2-2x} = 1.$$

Deoarece ambii membri ai ecuatiei sunt pozitivi, ridicand la patrat se obtine ecuatia echivalenta (a se vedea, de exemplu, [1])

$$x^2 - 2x = 1$$

cu solutiile $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Ecuatiile de tipul

$$A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} b^{f(x)} + C \cdot b^{2f(x)} = 0,$$

$(A,\ B,\ C \in \mathbf{R},\ A \cdot B \cdot C \neq 0)$ se numesc ecuatii exponentiale omogene. Prin multiplicare, de exemplu, cu $\frac{1}{b^{2f(x)}}$ ele se reduc la ecuatia patrata

$$At^2 + Bt + C = 0,$$

unde $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$.

Exemplul 5. Sa se rezolve ecuatiile

$$a)\ 64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0, \qquad b)\ 9 \cdot 2^{2x+2} - 45 \cdot 6^x - 3^{2x+4} = 0.$$

Rezolvare. a) Ecuatia se scrie

$$64 \cdot 3^{2x} - 84 \cdot 3^x \cdot 4^x + 27 \cdot 4^{2x} = 0$$

si impartind la 4^{2x} se obtine

$$64 \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^x - 84 \cdot \frac{3^x \cdot 4^x}{(4^x)^2} + 27 = 0$$

sau

$$64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - 84 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + 27 = 0.$$

Se noteaza $t = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ si se obtine ecuatia patrata

$$64t^2 - 84t + 27 = 0.$$

Discriminantul ecuatiei date este $\Delta = 84^2 - 4\cdot 64\cdot 27 = 4^2\cdot 3^2\cdot 7^2 - 4\cdot 4\cdot 16\cdot 9\cdot 3 = 4^2\cdot 3^2(49-48) =$ $= 12^2$, iar solutiile

$$t_1 = \frac{9}{16} \text{ si } t_2 = \frac{3}{4}.$$

Asadar

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{9}{16}, \\ \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{4}, \end{array}\right.$$

de unde $x_1 = 2$ si $x_2 = 1$.

b) Ecuatia se scrie

$$36 \cdot 2^{2x} - 45 \cdot 2^x \cdot 3^x - 81 \cdot 3^{2x} = 0$$

sau (multiplicand cu $\frac{1}{9 \cdot 3^{2x}}$)

$$4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 9 = 0.$$

Notand $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ se obtine ecuatia patrata

$$4t^2 - 5t - 9 = 0$$

cu solutiile $t = -1,\ t = \frac{9}{4}$. Cum $t > 0$ ramane $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$ de unde $x = -2$.

Uneori se intalnesc ecuatii ce se rezolva prin metoda ”scoaterii factorului comun in afara parantezei”.

Exemplul 6. Sa se rezolve ecuatiile

$$\begin{array}{l} a)\ 2^{x+1} - 2^x + 2^{x-2} - 2^{x-3} = 9, \\ b)\ 2^{x+1} - 2^{x+2} - 2^{x+3} = 5^x - 5^{x+1}, \\ c)\ x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}. \end{array}$$

Rezolvare. a) Ecuatia se scrie

$$2^x \cdot 2 - 2^x + \frac{2^x}{4} - \frac{2^x}{8} = 9$$

sau

$$2^x \left(2 - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = 9.$$

Efectuand operatiile din paranteze se obtine

$$2^x \cdot \frac{9}{8} = 9,$$

de unde $2^x = 8$ si $x = 3$.

b) Similar rezolvarii ecuatiei precedente se obtine:

$$2^{x+1} - 2^{x+2} - 2^{x+3} = 5^x - 5^{x+1} \;\Leftrightarrow\; 2^x \cdot 2 - 2^x \cdot 4 - 2^x \cdot 8 = 5^x - 5^x \cdot 5 \;\Leftrightarrow$$

$$2^x(2-4-8) = 5^x(1-5) \;\Leftrightarrow\; 2^x(-10) = 5^x(-4) \;\Leftrightarrow\; \frac{2^x}{5^x} \cdot (-10) = -4 \;\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{4}{10} \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^1 \;\Leftrightarrow\; x = 1.$$

c) Se trec toti termenii in partea stanga a ecuatiei si se grupeaza convenabil

$$(x^2 \cdot 2^{x+1} - 2^{x-1}) + (2^{|x-3|+2} - x^2 \cdot 2^{|x-3|+4}) = 0.$$

In fiecare paranteza se scoate factorul comun in afara parantezei

$$2^{x-1}(4x^2 - 1) + 2^{|x-3|+2}(1 - 4x^2) = 0,$$

de unde rezulta

$$(4x^2 - 1) \cdot (2^{x-1} - 2^{|x-3|+2}) = 0$$

si totalitatea de ecuatii

$$\left[\begin{array}{l} 4x^2 - 1 = 0, \\ 2^{x-1} = 2^{|x-3|+2}. \end{array}\right.$$

Prima ecuatie are solutiile $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, iar a doua se rezolva utilizand proprietatile modulului:

$$2^{x-1} = 2^{|x-3|+2} \;\Leftrightarrow\; x - 1 = |x-3| + 2 \;\Leftrightarrow\; x - 3 = |x-3| \;\Leftrightarrow\; x - 3 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 3.$$

Asadar, solutiile acestei ecuatii sunt

$$x \in \left\{\pm\frac{1}{2}\right\} \cup [3, +\infty).$$

Unele ecuatii exponentiale se rezolva prin metode specifice.

Exemplul 7. Sa se rezolve ecuatiile

$a)$ $(4+\sqrt{15})^2 + (4-\sqrt{15})^x = 62$,	$d)$ $4^x + (x-1)\cdot 2^x = 6 - 2x$,	$g)$ $(2x+1)\cdot 3^{x^2+x+3} = 27$,
$b)$ $5^{x-2} = 8 - x$,	$e)$ $x^2 + x + 2 = 2\cdot 2^x - 4^x$,	$h)$ $5^x \cdot \sqrt[x]{8^{x-1}} = 500$,
$c)$ $3^x + 4^x = 5^x$,	$f)$ $\sqrt[4]{2}^{\,3+2x-x^2} = \dfrac{x^2+1}{x}$,	$i)$ $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$.

Rezolvare. a) Se observa ca $(4+\sqrt{15})^x \cdot (4-\sqrt{15})^x = 1^x = 1$ si utilizand substitutia $t = (4+\sqrt{15})^x$ (atunci $(4-\sqrt{15})^x = \dfrac{1}{t}$) se obtine ecuatia

$$t + \frac{1}{t} = 62$$

sau

$$t^2 - 62t + 1 = 0$$

cu solutiile $t_1 = 31 - 8\sqrt{15}$ si $t_2 = 31 + 8\sqrt{15}$. Cum $31 \pm 8\sqrt{15} = (4 \pm \sqrt{15})^2$, se obtine totalitatea de ecuatii

$$\left[\begin{array}{l} (4+\sqrt{15})^x = (4+\sqrt{15})^2, \\ (4+\sqrt{15})^x = (4-\sqrt{15})^2, \end{array} \right.$$

de unde $x_1 = 2$ si $x_2 = -2$ (se tine seama ca $(4-\sqrt{15})^2 = (4+\sqrt{15})^{-2}$).

b) Se observa ca $x = 3$ este solutie a ecuatiei date. Alte solutii ecuatia data nu are, deoarece membrul din stanga reprezinta o functie crescatoare, iar membrul din dreapta o functie descrescatoare, si cum graficele acestor functii pot avea cel mult un punct comun, rezulta ca $x = 3$ este unica solutie.

c) Se observa ca $x = 2$ este solutie a acestei ecuatii. Alte solutii ecuatia nu are. In adevar, ecuatia se scrie

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

Se observa ca functia $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ ca suma a doua functii descrescatoare este la fel descrescatoare si, prin urmare, capata fiecare valoare a sa doar o singura data.

d) Se noteaza $t = 2^x$ si se rezolva ecuatia patrata in t:

$$t^2 + (x-1)t + 2x - 6 = 0.$$

Discriminantul acestei ecuatii este $\Delta = (x-1)^2 - 4(2x-6) = x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$, iar solutiile

$$t_1 = \frac{1-x-x+5}{2} = 3 - x, \quad t_2 = \frac{1-x+x-5}{2} = -2.$$

Cum solutia $t = -2$ nu verifica conditia $t > 0$, ramane

$$2^x = 3 - x$$

Se rezolva similar exemplului b) si se obtine $x = 1$.

e) Ecuatia se scrie

$$x^2 + x + 1 = 2 \cdot 2^x - 4^x - 1$$

sau

$$x^2 + x + 1 = -(2^x - 1)^2,$$

de unde rezulta, ca ecuatia nu are solutii. In adevar, cum $\left(x^2+x+1 = x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)$ membrul din stanga ecuatiei ia valori in multimea $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$, iar membrul din dreapta dreapta ecuatiei valori nepozitive.

f) Se observa ca ecuatia are solutii doar pentru $x > 0$. Atunci membrul din dreapta

$$\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

in plus semnul egalitatii se obtine pentru $x = 1$ (se tine seama de inegalitatea $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$ justa pentru orice $a > 0$), pe cand membrul din stanga ecuatiei primeste valoarea maxima 2 pentru $x = 1$. In adevar

$$(\sqrt[4]{2})^{3+2x-x^2} = (\sqrt[4]{2})^{4-1+2x-x^2} = (\sqrt[4]{2})^{4-(1-x)^2} \leq \sqrt[4]{2}^4 = 2.$$

Astfel unica solutie a acestei ecuatii este $x = 1$.

g) Se observa, ca pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ ecuatia nu are solutii (in adevar, in asa caz membrul din stanga ia valori nepozitive). Pentru $x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ membrul din stanga reprezinta o functie strict crescatoare, ca produsul a doua functii strict crescatoare, si, prin urmare, primesc fiecare valoare a sa doar o singura data. Ramane de observat ca $x = 0$ este solutie (unica) a ecuatiei.

h) Domeniul valorilor admisibile al ecuatiei este multimea numerelor naturale, mai mari ca 1. Ecuatia se scrie

$$5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500.$$

Se logaritmeaza, de exemplu, in baza 5 si se obtine

$$x + \log_5 2^{\frac{3(x-1)}{x}} = 3 + \log_5 2^2$$

sau

$$x + \frac{3(x-1)}{x} \log_5 2 - 3 - 2\log_5 2 = 0,$$

de unde se obtine ecuatia patrata

$$x^2 + x(\log_5 2 - 3) - 3\log_5 2 = 0$$

cu solutiile $x_1 = 3$ si $x_2 = -\log_5 2$. Cum $x_2 \notin DVA$, rezulta ca unica solutie a ecuatiei este $x = 3$.

i) DVA a ecuatiei este multimea $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ si astfel (a se vedea exemplul precedent) solutiile ei sunt numerele 3 si $-\log_5 2$.

Uneori se intalnesc ecuatii ce contin necunoscuta atat in baza cat si in exponentul puterii:

$$[h(x)]^{f(x)} = b \qquad \left([h(x)]^{f(x)} = [h(x)]^{g(x)}\right). \tag{6}$$

De regula, domeniul de definitie pentru functia $[h(x)]^{f(x)} \quad \left([h(x)]^{g(x)}\right)$ se considera multimea tuturor valorilor $x \in D(f) \quad (x \in D(f) \cap D(g))$, unde $d(f)$ desemneaza domeniul de definitie al functiei f (f si g), pentru care $h(x) > 0$. Astfel:

$$[h(x)]^{f(x)} = [h(x)]^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) = 1, \\ x \in D(f) \cap D(g). \end{cases} \end{array}\right.$$

Exemplul 8. Sa se rezolve ecuatiile:

$$a)\ |x-2|^{x^2+x+1} = (x-2)^2, \quad b)\ (x^2+x)^{x^2+2x} = 1, \quad c)\ |x-1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x-1|^3.$$

Rezolvare. a) Cum $a^2 = |a|^2$ ecuatia se scrie astfel

$$|x-2|^{x^2+x+1} = |x-2|^2$$

si este echivalenta cu totalitatea de sisteme

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x-2| > 0, \\ |x-2| \neq 1, \\ x^2+x+1 = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} |x-2| = 1, \\ x \in DVA. \end{cases} \end{array}\right.$$

de unde se obtin solutiile: $x = -2,\ x = 3$ si $x = 1$.

b) Se scrie $(x^2+x)^0 = 1$, si se obtine

$$(x^2+x)^{x^2+2x} = 1 \ \Leftrightarrow\ (x^2+x)^{x^2+2x} = (x^2+x)^0 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x > 0, \\ x^2+x \neq 1, \\ x^2+2x = 0, \end{cases} \\ x^2+x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

c) DVA al ecuatiei este multimea $(0; +\infty)$. In DVA ecuatia este echivalenta cu totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x-1| > 0, \\ |x-1| \neq 1, \\ \lg^2 x - \lg x^2 = 3. \end{cases} \\ \begin{cases} |x-1| = 1, \\ x > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

de unde rezulta solutiile $x = \dfrac{1}{10},\ x = 1000$ si $x = 2$.

Nota. Uneori este necesar ca functiile din (6) sa fie examinate pe domenii mai largi: se tine seama ca functia $h(x)^{f(x)}$ are sens si atunci cand $h(x) = 0$ si $f(x) > 0$ $(g(x) > 0)$ sau $h(x) < 0$ si $f(x) \quad (g(x))$ ia valori in multimea numerelor intregi etc. (a se vedea [2]-[4]).

Exercitii recapitulative

Sa se rezolve ecuatiile:

1. $8^{\frac{2(x-1)}{x}} = \sqrt{4^{x-1}}$.

2. $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$.

3. $0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\dfrac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$.

4. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 448$.

5. $3^{2x+1} + 3^{2x} - 3^{2x-2} = 315$.

6. $2^{2x+3} \cdot 3^x + 2 \cdot 4^x \cdot 3^{x+2} = \dfrac{13}{72}$.

7. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$.

8. $5^{2x} - 7^x - 7 \cdot 5^{2x+1} + 5 \cdot 7^{x+1} = 0$.

9. $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$.

10. $4^x - 12 \cdot 2^x = 64$.

11. $4^{x-1} - 3 \cdot 2^{x-2} = 1$.

12. $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15$.

13. $3^{x \log_2 7} \cdot 7^{x^2+x} = 1$.

14. $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x = 6$.

15. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

16. $2^{x+3} - 3^{x^2+2x-6} = 3^{x^2+2x-5} - 2^x$.

17. $(x-3)^{3x^2-10x+3} = 1$.

18. $|x-2|^{10x^2-3x-1} = 1$.

19. $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}} = \sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}$.

20. $8 \cdot 9^x + 6^{x+1} = 27 \cdot 4^x$.

21. $2 \cdot 16^{\cos x} - 20^{\cos x} = 3 \cdot 25^{\cos x}$.

22. $x^2 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 4^{2-x} = 4^{\sqrt{2-x}+2} + x^2 \cdot 2^{-2x}$.

23. $2^{|3x-5|} = 4 \cdot 8^{|x-1|}$.

24. $5^{3x} + 5^{3(1-x)} + 15(5^x + 5^{1-x}) = 216$.

25. $4^x + 3^x = 7^x$.

26. $4^x + 3^x = 91^{\frac{x}{3}}$.

27. $5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$.

28. $(x+1) \cdot 9^{x-3} + 4x \cdot 3^{x-3} - 16 = 0$.

29. $7^{6-x} = x + 2$.

30. $x^2 - x + 1 = 2 \cdot 2^{x-1} - 4^{x-1}$.

Bibliografie

1. P. Cojuhari, A. Corlat. Ecuatii si inecuatii algebrice. Mica biblioteca a elevului. Seria matematica si informatica. Editura ASRM. Chisinau, 1995.

2. P. Cojuhari. Ecuatii si inecuatii. Teorie si practica. Chisinau, Universitas, 1993.

3. F.P. Iaremciuc, P. Rudcenco. Algebra i ălementarnîe funcţii. Kiev, Naucova Dumca, 1987. (rus.)

4. V.A. Vişeniskii i dr. Zbirnik zadaci z matematiki. Kiev, "Libidi", 1993. (ucr.)